

А. В. ПЕРЕЛЬМУТЕР  
канд. техн. наук

О С Н О В Ы  
Р А С Ч Е Т А  
В А Н Т О В О -  
С Т Е Р Ж Н Е В Ы Х  
С И С Т Е М



ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛИТЕРАТУРЫ ПО СТРОИТЕЛЬСТВУ  
Москва 1969

В книге дано систематизированное изложение основ статики вантово-стержневых комбинированных систем. Отличительными особенностями монографии является ориентация на применение хорошо известных инженерам классических методов линейной строительной механики к расчету нелинейных систем, а также выбор методов и приемов расчета, ориентированных на использование ЭВМ. В качестве примеров рассматриваются задачи, связанные с проектированием мачтовых конструкций, вантовых пролетных строений и покрытий большого пролета.

Книга рассчитана на инженеров-проектировщиков, научных работников, аспирантов и может быть использована в качестве учебного пособия по специальным разделам курсов строительной механики и металлических конструкций.

Рост масштабов строительства в нашей стране, связанный с выполнением решений XXIII съезда КПСС, ставит особенно остро вопрос обоснования принимаемых конструктивных решений. Для этого инженеры-проектировщики должны быть вооружены соответствующим теоретическим аппаратом.

Монография посвящена систематическому изложению основ расчета обширного класса инженерных сооружений, в которых применяются вантовые элементы. Несмотря на то что интерес к таким конструкциям велик и область их применения с каждым годом растет, теория статического расчета этих систем, построенная на достаточно широких предпосылках, разработана чрезвычайно мало. Вместе с тем некоторые существенные особенности этих систем, в частности их нелинейность, затрудняют применение привычных методов расчета, излагаемых в вузовских курсах строительной механики.

В книге изложены основы статики вантово-стержневых систем таким образом, чтобы, с одной стороны, иметь теорию, адекватную сути вопроса, а с другой, с тем, чтобы освоение теории инженером было по возможности упрощено. С этой целью основная ориентация была взята на применение хорошо известных классических методов линейной строительной механики к расчету нелинейных вантовых систем.

Вторая отличительная особенность книги состоит в выборе таких методов расчета, которые хорошо приспособлены к использованию современной вычислительной техники. Дело в том, что большинство реальных задач расчета сложных нелинейных вантовых систем требует выполнения столь большого количества вычислений; кроме того, без механизации сама возможность выполнения расчета становится сомнительной. В связи с этим возникла необходимость обратить особое внимание на формали-

зацию всех выкладок в той степени, чтобы алгоритмы расчета, построенные на основе излагаемых методов, были совершенно недвусмысленными.

Наконец, следует отметить, что ввиду малой разработанности основных положений нелинейной строительной механики при исследовании вопроса о расчете вантово-стержневых систем в отдельных случаях пришлось пойти на некоторое расширение предмета настоящей монографии. Это вызвано необходимостью в построении достаточно четких отправных положений для исследования того конкретного класса систем, которым посвящена книга.

Первоначально предполагалось, что в этой книге будут освещаться и вопросы, связанные с колебаниями вантово-стержневых систем. Однако в процессе работы над рукописью выяснилось, что рассмотрение вопросов динамики требует существенного расширения объема и поэтому в настоящей работе излагаются лишь вопросы статики вантово-стержневых систем.

# Глава 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ВАНТОВО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

---

## § 1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В последние годы вантовые системы нашли довольно широкое применение в различных отраслях строительства, особенно в сооружениях больших пролетов и высот. Объясняется это тем, что вантовые системы позволяют эффективно использовать следующие прогрессивные идеи:

- 1) использование высокопрочных материалов, в частности проволоки и тросов, которые уже в настоящее время имеют прочность порядка  $20\,000 \text{ кГ}/\text{см}^2$ . При этом конструктивный коэффициент для растянутых вантовых элементов очень невелик;
- 2) применение предварительного натяжения, позволяющего активно вмешиваться в «игру сил» и добиваться эффективных конструктивных решений;
- 3) применение индустриальных методов монтажа, в частности навесной сборки или подъема сооружения целиком, что становится возможным в связи с меньшим весом вантовых систем по сравнению с жесткими.

Следует отметить, что наряду с отмеченными преимуществами вантовых систем у них имеются и недостатки, к числу которых относятся сравнительно большая деформативность, опасность возникновения вибраций и уязвимость мест анкеровки вант. Для многих типов вантовых систем выход из строя отдельных вант приводит не к перераспределению усилий в конструкции, а к глобальному разрушению системы. Тем не менее преимущества этих систем таковы, что их строительство распространяется все шире, захватывая все большее число типов инженерных сооружений.

Характерной чертой вантовых конструкций является использование в качестве основных несущих элементов гибких нитей. Системы с элементами из гибких нитей мо-

жно подразделить на сети из гибких нитей и комбинированные системы. К первому классу относятся различного рода сети, применяемые в антенных устройствах, висячие оболочки в виде вантовых сетей, натянутых на жесткий контур, контактные сети электрифицированного железнодорожного и городского транспорта и др. Второй класс включает в себя мосты, мачтовые конструкции, большие-пролетные вантовые перекрытия с балкой жесткости, стрелы шагающих экскаваторов и многие другие типы инженерных сооружений.

В настоящей работе мы будем рассматривать вантово-стержневые системы, которые отличаются от других вантовых конструкций свойством *квазинеизменяемости*. Под этим термином понимается следующее — *вантовая система относится к квазинеизменяемым, если стержневая система, полученная из вантовой путем замены всех вант стержнями, способными воспринимать сжатие, оказывается геометрически неизменяемой*. Такое определение позволяет выделить из огромного разнообразия вантовых систем класс конструкций с общими статическими свойствами, для которого можно разработать единую теорию расчета. В следующем параграфе описываются некоторые типичные примеры вантово-стержневых систем; рассмотрение этих примеров показывает, что выделенный нами класс вантово-стержневых систем достаточно обширен.

## § 2. ПРИМЕРЫ КОНСТРУКТИВНОГО РЕШЕНИЯ ВАНТОВО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Описание различных конструктивных схем вантово-стержневых систем начнем с большепролетных покрытий. Такие покрытия возводятся над ангарами,

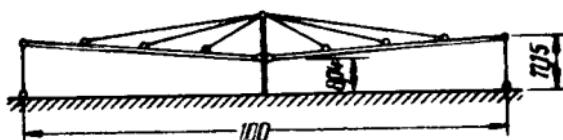


Рис. 1

спортивными манежами и стадионами, рынками и т. п.

Подвесное двухконсольное покрытие рынка в Ганновере (рис. 1) состоит из балок жесткости, шарнирно при-

крепленных к стойкам, установленным с шагом 12,5 м и поддерживаемых шестью симметрично расположеными вантами, вынесеными над покрытием [35].

Схема ангара в Нью-Йоркском аэропорту (рис. 2) также двухконсольная, однако консоли здесь ломаные

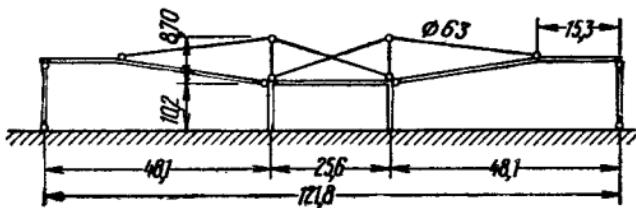


Рис. 2

и опираются на П-образные рамы, установленные с шагом 9,9 м. Ванты из тросов диаметром 63 мм закреплены в местах излома консолей, переброшены через качающиеся стойки и заанкерены в основной раме [35].

Другой ангар в аэропорту Рим-Фиумичино (рис. 3) выполнен в виде Г-образных ферм, поддерживаемых оттяжками из труб (эффективнее оказалась бы тро-совая оттяжка). Оттяжки через шарнирно прикрепленную к основной ферме стойку и решетчатый горизонтальный элемент крепятся к пристройке ангаря.

К этим системам близко примыкает конструкция покрытия посадочного павильона аэропорта Шереметьево (рис. 4). Здесь система радиально расположенных балок жесткости подвешена на вантах к верхнему кольцу, расположенному на железобетонных колоннах [27].

Покрытие олимпийского спортивного зала в Скво Велли (рис. 5) поддерживается восемью парами соединенных друг с другом наклонных консольных балок жесткости. Тросы диаметром 57 мм крепятся к вершинам наклонных пилонов. Шаг основных несущих конструкций 9,76 м [27].

Другая схема заложена в проект покрытия московского стадиона «Динамо» (рис. 6) размером 180×226 м.

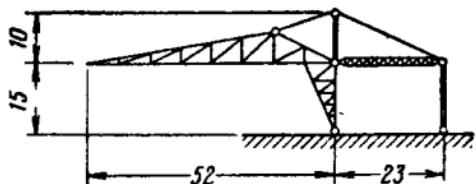


Рис. 3

Здесь развивается идея В. Г. Шухова (покрытие ГУМа в Москве) о раскреплении гибкой арки такой системой предварительно напряженных вантовых затяжек, которая заставляет работать арку подобно ферме с весьма небольшими изгибающими моментами [44, 63].

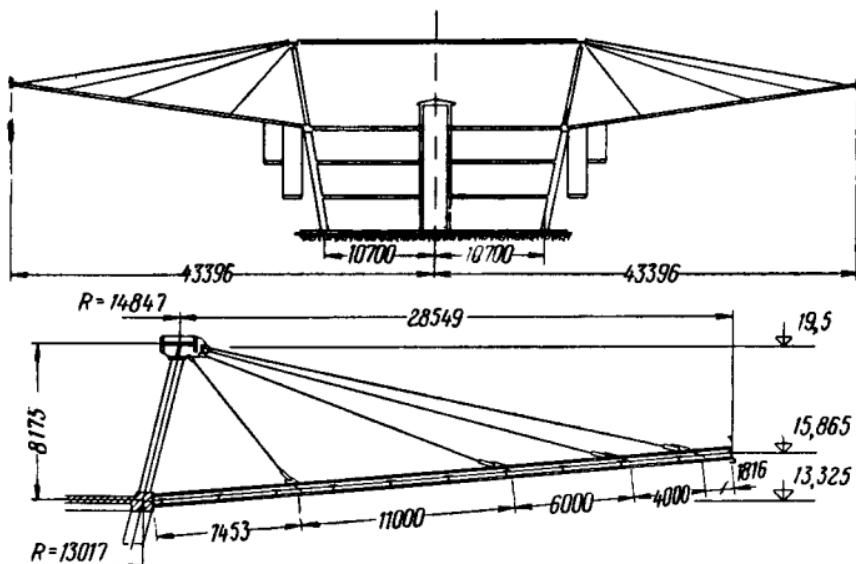


Рис. 4

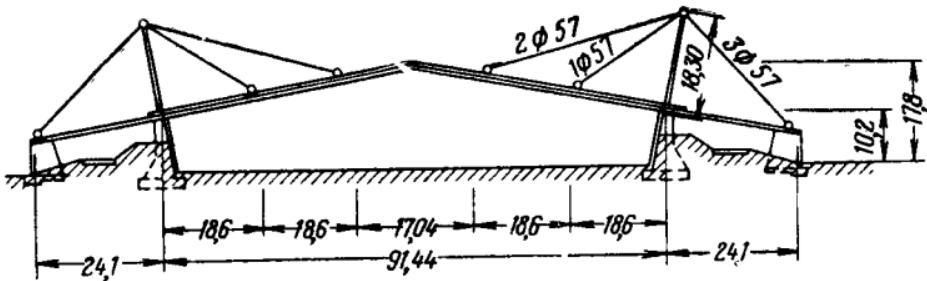


Рис. 5

Широкое развитие вантово-стержневые системы получили в конструкциях мостового типа [30, 54, 55, 83, 90, 105] (в автодорожных мостах, переходах газопроводов и нефтепроводов через реки, в передвижных сооружениях мостового типа).

На рис. 7 приведена одна из наиболее старых вантовых систем мостов — система Жискляра—Росновского. Этот мост был построен в 1936 г. [83].

Автодорожный мост в Кельне (Северинский мост), показанный на рис. 8, и пешеходный мост через гавань в Киеве (рис. 9) дают примеры вантовых мостовых конструкций с упрощенной системой вант [26, 105]. Эта система получает в последние годы широкое распространение для мостов пролетом 100—300 м. При больших пролетах из условия примыкания центральных вант к балке жесткой

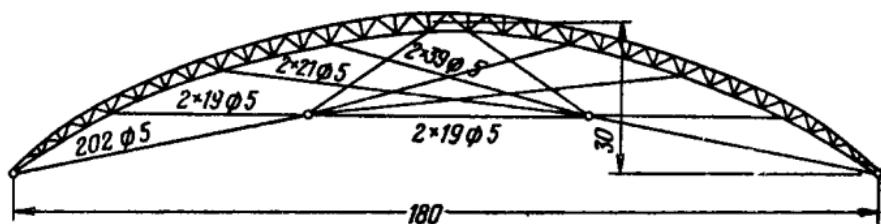


Рис. 6

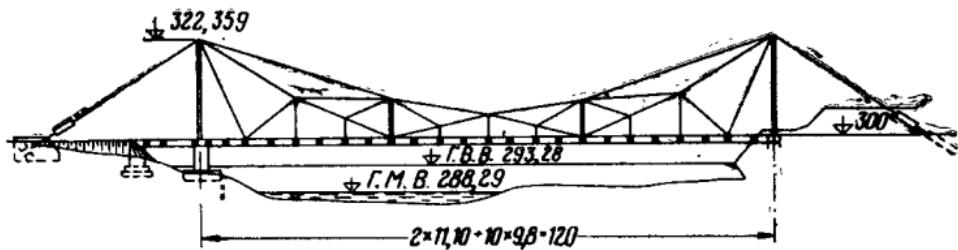


Рис. 7

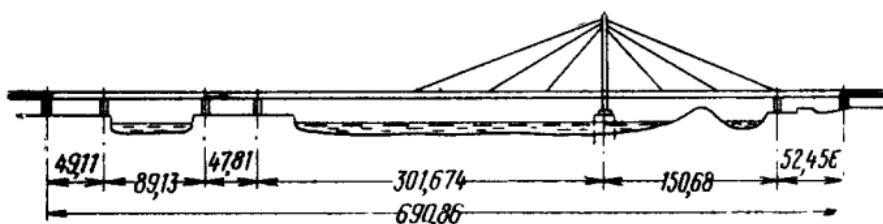


Рис. 8

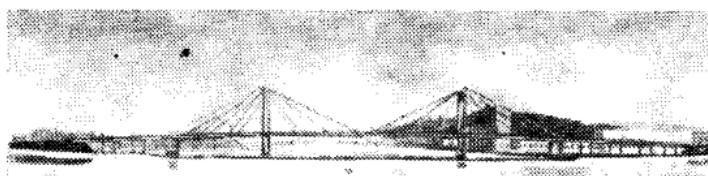


Рис. 9

рукций с упрощенной системой вант [26, 105]. Эта система получает в последние годы широкое распространение для мостов пролетом 100—300 м. При больших пролетах из условия примыкания центральных вант к балке жесткой

кости требуется слишком высокий пylon, что делает в некоторых случаях эту систему невыгодной.

Для больших пролетов оказывается выгодной система, примененная при строительстве вантового перехода через Волгу, пролетом 874 м (рис. 10) для канатной до-

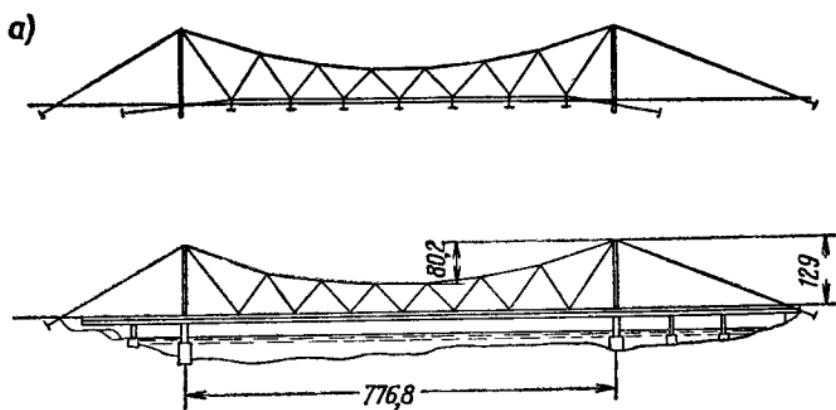


Рис. 10

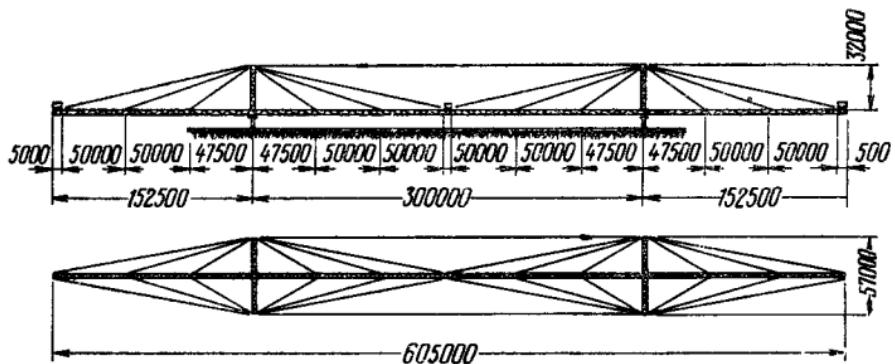


Рис. 11

роги Волгоградской ГЭС [54]. Исходная система имела криволинейное очертание нижнего пояса, что позволило создать предварительное натяжение в вантовой решетке. Позже при перестройке канатной дороги в автодорожный мост большая постоянная нагрузка позволила спрямить нижний пояс.

Оригинальная конструкция передвижного дождевального агрегата длиной 600 м представлена на рис. 11. Здесь вантовая система позволила резко уменьшить вес установки при высоких эксплуатационных качествах.

Следует отметить, что небольшой вес балки жесткости потребовал даже устройства балластных грузов, создающих предварительное натяжение вант.

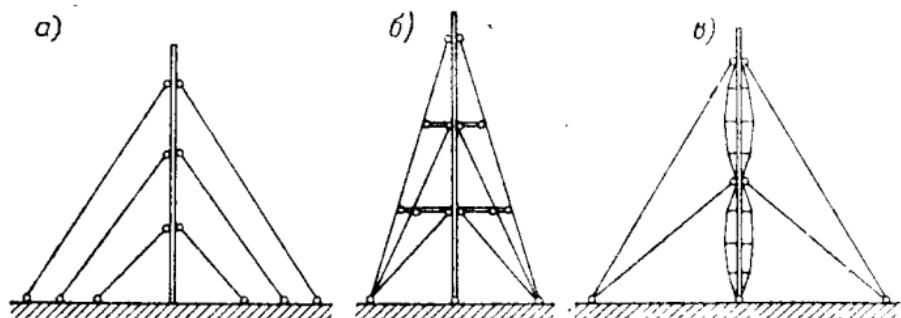


Рис. 12

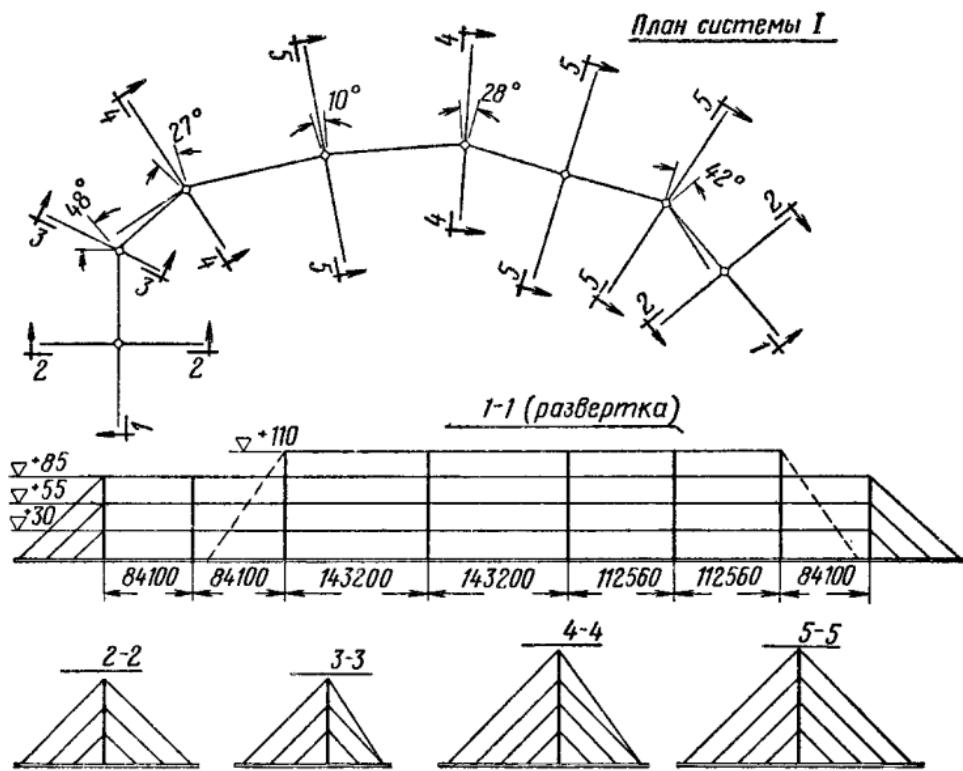


Рис. 13

Высотные конструкции мачтового типа [19, 69, 78, 99] для сооружений радиосвязи, радиовещания и телевидения дают третью группу примеров вантово-стержневых систем, нашедших себе здесь широкое применение.

Наряду с традиционными схемами [69, 78] мачт с тремя и четырьмя плоскостями оттяжек (рис. 12) в последние годы в мачтостроении получили широкое распространение системы мачт, объединенных общими оттяжками в

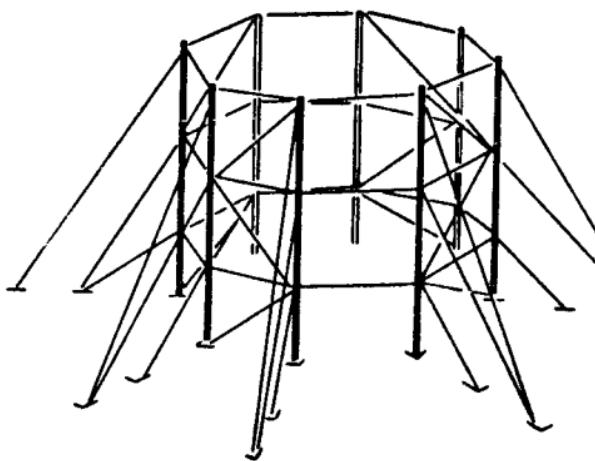


Рис. 14

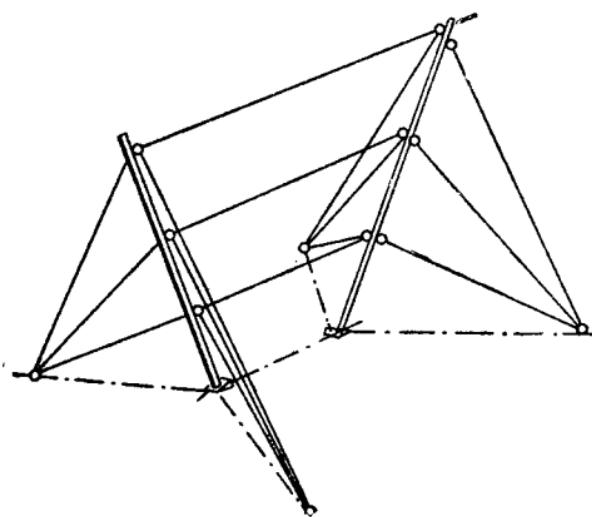


Рис. 15

одну конструкцию. Характерным примером такой системы являются опорные конструкции антенно-мачтовых устройств радиовещательного центра в Багдаде [19], представленные на рис. 13. Другие примеры таких систем приведены на рис. 14 и 15, где изображены схемы опорных конструкций для широкодиапазонных логарифмических антенн.

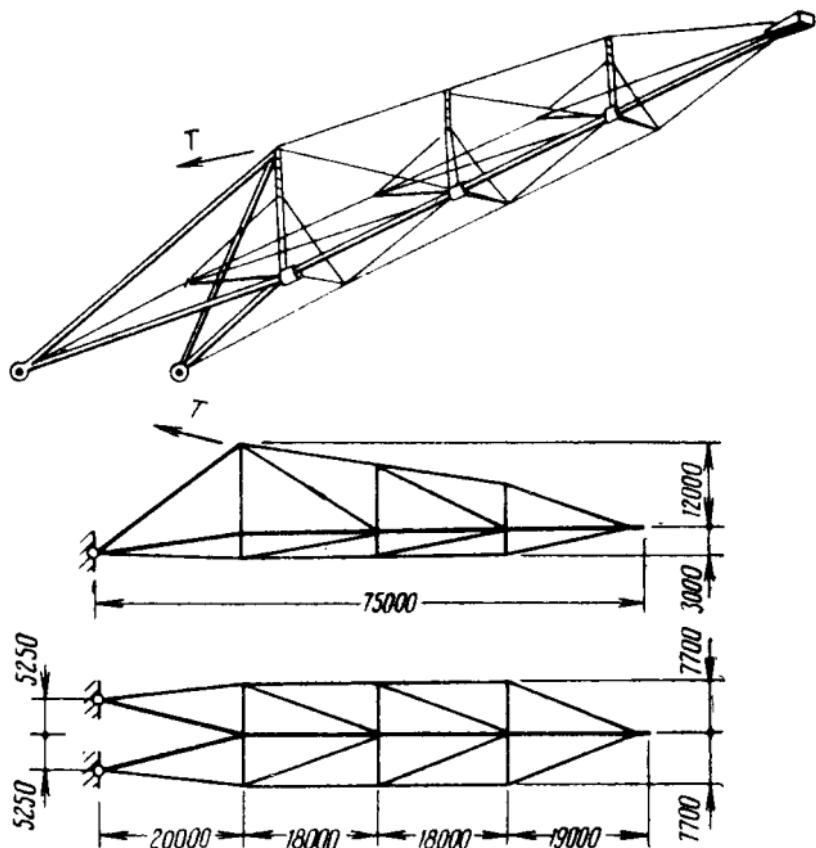


Рис. 16

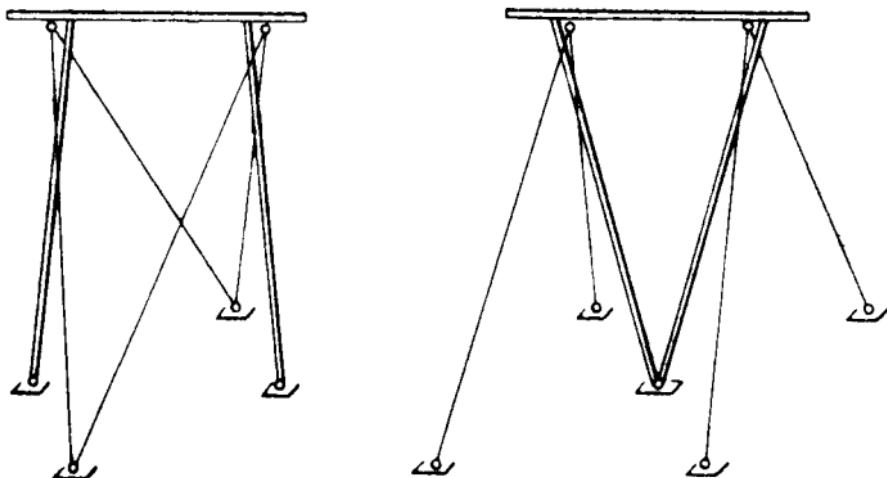


Рис. 17

Интересные вантово-стержневые системы встречаются [7] в стреловых системах мощных шагающих экскаваторов (рис. 16) и в конструкциях опор линий электропередачи (рис. 17) [29]; оригинальный трамплин построен недавно в Киеве (рис. 18).

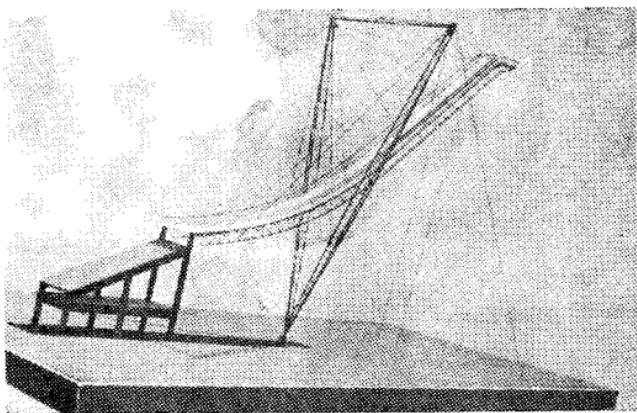


Рис. 18

Число примеров нетрудно увеличить, однако и приведенных выше достаточно, чтобы судить о широте распространения вантово-стержневых систем и о разнообразии их конструктивных схем.

### § 3. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

Вантово-стержневые системы будут рассматриваться ниже в предположении справедливости следующих расчетных предпосылок:

- а) нагрузки и другие внешние воздействия предполагаются квазистатическими и консервативными;
- б) все элементы работают в пределах упругих деформаций;
- в) перемещения узлов системы предполагаются малыми в том смысле, как это принято в задачах строительной механики, т. е. допускается принимать в качестве кривизны стержня выражение второй производной от функции прогибов, а также считается справедливой гипотеза Виллио;

г) все гибкие нити имеют малые стрелки (являются пологими), а нагрузки на вантовые элементы направлены по нормали к хорде.

По поводу этих предположений можно только заметить, что они являются общепринятыми при статическом расчете и справедливость их подтверждается многолетней практикой эксплуатации конструкций и проведенными натурными и модельными экспериментами [71, 103]. Некоторые из этих предположений все же нуждаются в дополнительном анализе (например, вопрос о пренебрежении составляющими нагрузки на ванты, действующими вдоль нити, рассмотрен ниже в § 7), другие могут быть оценены апостеори по результатам расчета (например, предположение о малости перемещений).

## Глава 2. ГИБКАЯ НИТЬ КАК ЭЛЕМЕНТ ВАНТОВО-СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Настоящая глава является в некотором смысле вспомогательной. В ней анализируются известные соотношения для упругой, пологой, гибкой нити [23]. Стиль изложения и методика получения некоторых основных зависимостей ближе всего примыкают к работе В. Н. Гордеева [11], однако отличительной особенностью здесь является целевая направленность анализа. Нас в основном интересует зависимость между удлинением хорды, стягивающей концы гибкой нити, и усилиями (напряжениями) в последней, поскольку именно эта зависимость характеризует гибкую нить как элемент некоторой более сложной системы. Более традиционный круг вопросов, связанный с определением формы провеса нити и работой нити на нагрузки, приложенные непосредственно к ней, затрагивается только в той мере, которая диктуется основной задачей.

### § 4. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПОЛОГОЙ ГИБКОЙ НИТИ

Рассмотрим пологую<sup>1</sup> гибкую нить, загруженную произвольной нагрузкой, расположенной в одной плоскости. Если в этой же плоскости выбрать системы прямоугольных декартовых координат  $XOY$  и разложить нагрузку по координатным осям, то условия равновесия бесконечно малого элемента нити (рис. 19) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= H + dH - H + hdx = 0; \\ \Sigma Y &= Q + dQ - Q + qdx = 0.\end{aligned}\} \quad (1)$$

<sup>1</sup> Нить будем считать пологой в том случае, когда угол между касательной к любой ее точке и прямой, соединяющей концы нити, мал.

Эти условия приводят к дифференциальным уравнениям:

$$\frac{dH}{dx} + h = 0; \quad (2)$$

$$\frac{dQ}{dx} + q = 0. \quad (3)$$

Поскольку гибкая нить не сопротивляется изгибу, суммарное усилие в ней направлено по касательной, т. е.

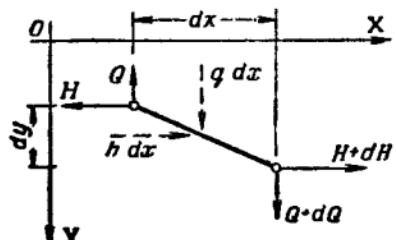


Рис. 19

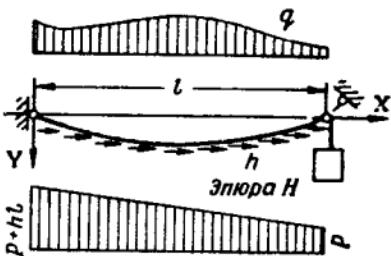


Рис. 20

между неизвестными компонентами  $Q$  и  $H$  этого усилия существует зависимость

$$\frac{Q}{H} = \frac{dy}{dx}. \quad (4)$$

Будем предполагать, что система координат выбрана таким образом, что ось  $X$  параллельна хорде гибкой нити. В силу предположения о пологости гибкой нити можно записать:

$$\frac{dy}{dx} \approx \gamma, \quad (5)$$

где через  $\gamma$  обозначен угол между касательной к нити и осью  $X$ .

Уравнения равновесия гибкой нити (2) и (3) чрезвычайно просты, однако неизвестные  $H$  и  $Q$  могут быть определены из них только с точностью до произвольных констант. В зависимости от того, каким образом сформулированы условия, из которых определяются произвольные постоянные, можно различать задачи, статически определимые, для полного решения которых не требуется рассматривать уравнения деформаций, и задачи, статически неопределенные, решение которых без рассмотрения условий деформаций невозможно.

В тех случаях когда для какой-нибудь точки задано искомое натяжение  $H$  или поперечное усилие  $Q$ , можно говорить о статической определимости задачи относительно натяжения или поперечного усилия.

Так, на рис. 20 изображена нить с контргрузом, для которой можно записать условие:

$$H = P \text{ при } x = l,$$

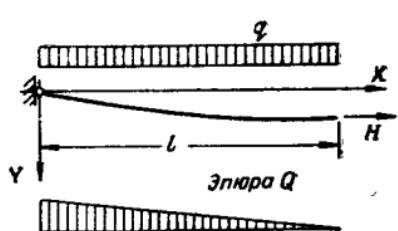


Рис. 21

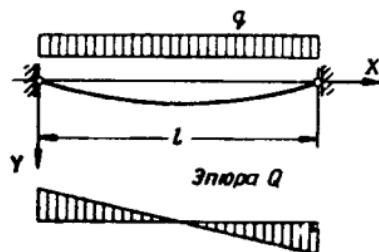


Рис. 22

которое дает возможность определить произвольную постоянную для уравнения (2). Например, если продольная компонента нагрузки задана по закону  $h(x) = \text{const}$ , то натяжение может быть определено из уравнения

$$H = - \int_0^x h dx + C = -hx + C,$$

а величина  $C$  из приведенного выше условия:

$$-hl + C = P; C = P + hl.$$

Окончательно имеем:

$$H = P + h(l - x).$$

Аналогично решается задача и для случая, изображенного на рис. 21, где нить закреплена на одной опоре, а второй ее конец удерживается силой  $H$  (к такой расчетной схеме можно привести, например, задачу о расчете якорной цепи или аэростатного троса). Для этой нити можно записать

$$Q = 0 \text{ при } x = l.$$

При постоянной нагрузке  $q(x) = \text{const}$  получим:

$$Q = - \int_0^x q dx + C = -qx + C; -ql + C = 0;$$

$$C = ql; Q = q(l - x).$$

Приведенные выше примеры статически определимых задач являются чрезвычайно редкими. Чаще условия для определения произвольных постоянных выражаются не через усилия, а через перемещения и тогда необходимо рассматривать уравнения деформаций. Так, для наиболее распространенного случая — нити с закрепленными кон-

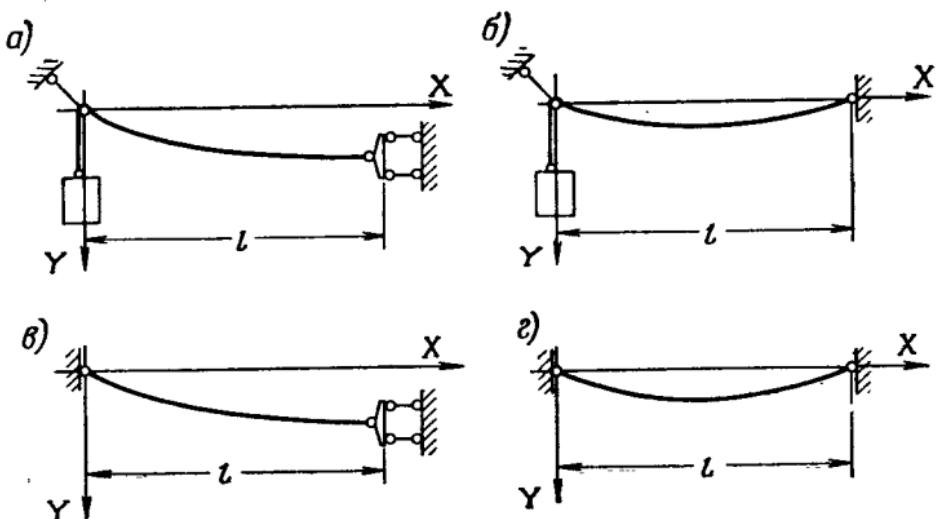


Рис. 23

цами, представленной на рис. 22, можно записать три условия:

а)  $y=0$  при  $x=0$ ;

б)  $y=0$  при  $x=l$ ;

в) заготовка нити длиннее ее пролета на величину  $\Delta l$ .

Решение этой задачи при помощи одних только уравнений равновесия неосуществимо.

В зависимости от того, каким образом заданы условия для определения произвольных постоянных, можно подразделить задачи на четыре типа. На рис. 23 приведены примеры задач различных типов:

а) статически определимые относительно  $Q$  и  $H$ ;

б) статически определимые относительно  $H$  и статически неопределенные относительно  $Q$ ;

в) статически определимые относительно  $Q$  и статически неопределенные относительно  $H$ ;

г) статически неопределенные относительно  $H$  и  $Q$ .

## § 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПОЛОГОЙ ГИБКОЙ НИТИ

В первую очередь рассмотрим случай нити с известным (заданным) натяжением. Ее поведение описывается следующей системой зависимостей:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ}{dx} + q &= 0; \\ \frac{dy}{dx} &= \gamma; \\ \gamma &= \frac{Q}{H}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Нетрудно заметить, что систему линейных соотношений (6) можно истолковать как условия равновесия и совместности деформаций для некоторой одномерной упругой системы<sup>1</sup>, в которой  $x$  — координата точки;  $q$  — нагрузка;  $Q$  — внутреннее усилие;  $\gamma$  — деформация;  $y$  — перемещение;  $H$  — мера жесткости.

Т а б л и ц а 1

Уравнение	Уравнение для поперечных усилий и перемещений гибкой пологой нити	Уравнение для продольных усилий и перемещений упругого стержня
Статическое	$\frac{dQ}{dx} + q = 0$	$\frac{dN}{dx} + n = 0$
Геометрическое	$\frac{dy}{dx} = \gamma$	$\frac{d\Delta}{dx} = \varepsilon$
Физическое	$\gamma = \frac{Q}{H}$	$\varepsilon = \frac{Nl}{EF}$

Действительно, если в табл. 1 параллельно записать основные соотношения для расчета одномерной упругой системы (например, растянутого стержня) и соотношения (6), то бросается в глаза полная тождественность соответствующих уравнений.

<sup>1</sup> Эта аналогия замечена В. Н. Гордеевым [10].

Линейность уравнений (6) и аналогия, отмеченная в табл. 1 дают основание применить для расчета пологой гибкой нити с известным натяжением все известные теоремы строительной механики. В частности, перемещения могут быть определены по формуле Максвелла—Мора:

$$y_{tp} = \int_0^l \frac{Q_i Q_p}{H} dx. \quad (7)$$

Здесь  $Q_i$  — эпюра поперечных усилий для нити от единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения;  $Q_p$  — то же, от нагрузки на нить;  $H$  — натяжение нити, в общем случае переменное по длине. Интегрирование распространяется на всю длину нити.

Как и в обычных задачах строительной механики, одну из эпюр  $Q_i$  или  $Q_p$  можно строить для статически определимой системы, что резко облегчает определение перемещений.

**Пример.** Требуется определить стрелу провеса нити (рис. 24, а) в середине пролета под воздействием нагрузки  $q$  на левой половине пролета и сосредоточенной силы  $P$  в четверти пролета. Натяжение создается контргрузом  $H$  и продольной силой  $T$ , приложенной в четверти пролета.

Нить является статически неопределенной относительно поперечных сил, но если воспользоваться условиями симметрии, то можно легко построить эпюру  $Q_i$  от единичной силы в середине пролета. Грузовую эпюру с  $Q_p$  строим для статически определимой основной системы, образованной из заданной путем устранения правой опоры нити (т. е. для системы, аналогичной рис. 23, а).

Интегрирование можно выполнить по участкам, используя правило Верещагина для перемножения эпюр:

$$y_{(0.5)} = \frac{l}{4} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{ql}{2} + 2P + q \frac{l}{4} \right) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{H} +$$

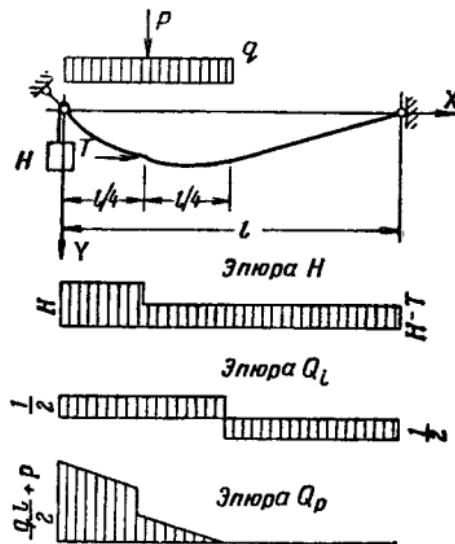


Рис. 24

$$+ \frac{l}{4} \cdot \frac{ql}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{H-T} \cdot \frac{1}{2} = \\ = \frac{l}{16} \left[ \frac{1}{H} \left( 2P + \frac{3ql}{4} \right) + \frac{ql}{4(H-T)} \right].$$

Из приведенного выше примера видно, что определение поперечных перемещений для панелей, статически оп-

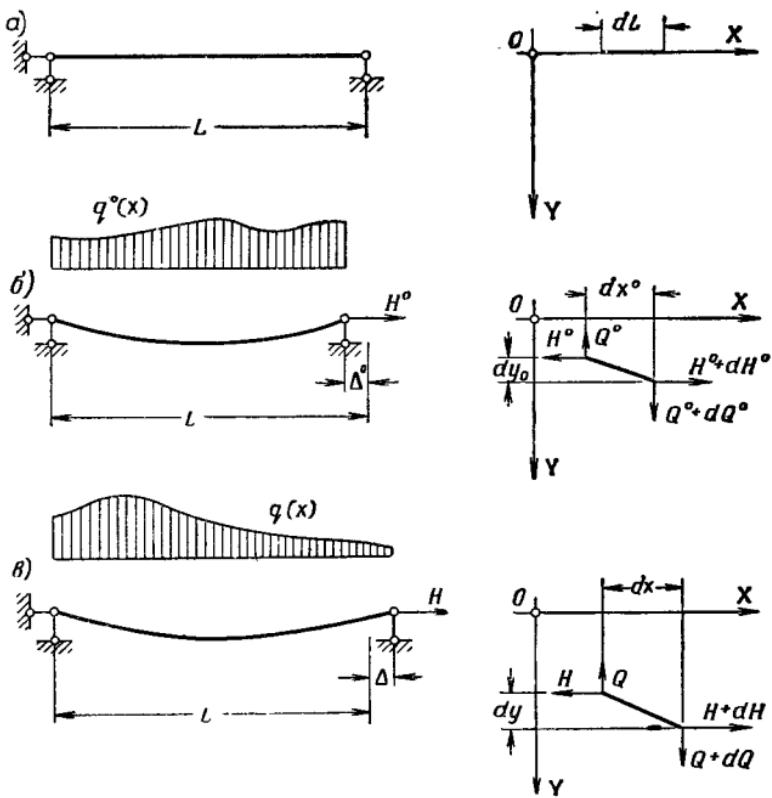


Рис. 25

ределимых относительно натяжений, не представляет собой никаких принципиальных трудностей. Что касается систем, статически неопределимых относительно натяжений, то здесь в первую очередь необходимо определить неизвестное натяжение, после чего можно воспользоваться формулой (7).

Перейдем теперь к определению продольных перемещений в пологой гибкой панели, загруженной произвольной поперечной нагрузкой, при переходе панели из одного состояния в другое.

Выделим из нити бесконечно малый элемент, который в выпрямленном ненатянутом состоянии (рис. 25, а) при температуре  $T=0$  имел длину  $dL$  (ниже это состояние нити, характеризуемое значениями  $q=H=T=0$ , будет называться недеформированным состоянием нити). В исходном (монтажном) состоянии, характеризуемом поперечной нагрузкой  $q^0$ , температурой  $T^0$  и натяжением  $H^0$ , длина этого же элемента равняется  $dS^0$  (рис. 25, б).

В исследуемом (загрузочном) состоянии (рис. 25, в) при нагрузке  $q$ , температуре  $T$  и натяжении  $H$  длина элементарного участка нити равна  $dS$ . Если считать, что материал нити работает в упругой стадии (справедлив закон Гука), то можно записать:

$$dS^0 = dL \left( 1 + \frac{H^0}{EF} + \alpha T^0 \right); \quad (8)$$

$$dS = dL \left( 1 + \frac{H}{EF} + \alpha T \right), \quad (9)$$

где  $EF$  — жесткость нити на растяжение;  $\alpha$  — коэффициент температурного расширения.

Из геометрических соображений, принимая в соответствии с гипотезой о пологости нити углы наклона нити  $\gamma^0$  и  $\gamma$  малыми, можно получить:

$$dS^0 = dx^0 \left[ 1 + \frac{1}{2} (\gamma^0)^2 \right]; \quad (10)$$

$$dS = dx \left( 1 + \frac{1}{2} \gamma^2 \right). \quad (11)$$

Из приведенных выше равенств с учетом малости  $(\gamma^0)^2$  и  $\gamma^2$  по сравнению с единицей вытекает, что:

$$dx^0 = dL \left( 1 + \frac{H^0}{EF} + \alpha T^0 \right) \left[ 1 - \frac{(\gamma^0)^2}{2} \right]; \quad (12)$$

$$dx = dL \left( 1 + \frac{H}{EF} + \alpha T \right) \left( 1 - \frac{\gamma^2}{2} \right), \quad (13)$$

а относительное изменение проекции элементарного участка нити на ось  $X$  равняется:

$$\varepsilon = \frac{dx - dx^0}{dx} = \frac{H - H^0}{EF} + \alpha (T - T^0) - \frac{\gamma^2 - (\gamma^0)^2}{2}. \quad (14)$$

Учитывая то обстоятельство, что полное усилие в нити должно быть направлено по касательной, можно записать для пологой нити:

$$\frac{Q^0}{H^0} = \operatorname{tg} \gamma^0 \approx \gamma^0; \quad \frac{Q}{H} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma. \quad (15)$$

Подстановка (15) в (14) дает выражение для относительного удлинения элементарного участка нити как функцию только статических величин:

$$\varepsilon = \frac{H - H^0}{EF} + \alpha(T - T^0) - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{Q}{H} \right)^2 - \left( \frac{Q^0}{H^0} \right)^2 \right]. \quad (16)$$

Если значение  $\varepsilon$  проинтегрировать по всей длине нити, то можно получить величину удлинения хорды нити, т. е.

$$\Delta = \int_0^L \varepsilon dx. \quad (17)$$

В частности, для нити с постоянными по длине натяжением и температурой

$$\begin{aligned} \Delta = & \int_0^L \frac{(H - H^0)}{EF} dx + \int_0^L \alpha(T - T^0) dx - \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \frac{Q(x)}{H} \right]^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \frac{Q^0(x)}{H^0} \right]^2 dx = \frac{(H - H^0)L}{EF} + \alpha L(T - T^0) - \\ & - \frac{\int_0^L Q^2 dx}{2H^2} = \frac{\int_0^L (Q^0)^2 dx}{2(H^0)^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Мы пришли к известному уравнению для расчета пологой гибкой нити, полученному другим путем в работах Р. Н. Мацелинского [41, 42] и В. К. Качурина [23, 24].

В заключение отметим, что большинство результатов настоящего параграфа можно получить и другим путем [23, 42], не привлекая формальный аппарат метода сил к тому же еще с использованием непривычной основной системы. Тем не менее избранный здесь метод вывода основных расчетных зависимостей представляется заманчивым ввиду того, что на этом пути можно познакомиться с одной из основных идей настоящей работы — развернутым использованием классических методов линейной строительной механики, применительно к нелинейным за-

дачам статики систем с гибкими нитями. Эта идея подробно развивается в последующих главах применительно к объектам, более сложным, чем отдельная гибкая нить, где избранный метод получения основных расчетных зависимостей позволяет прийти к менее тривиальным результатам.

## § 6. НИТЬ КАК НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИЙ СТЕРЖЕНЬ

В вантово-стержневых системах нить обычно играет роль элемента, предназначенного для передачи продольных растягивающих усилий. Поэтому нас в первую очередь будут интересовать соотношения типа (18) между натяжением  $H$  и удлинением  $\Delta$ , характеризующие нить как нелинейно-упругий стержень.

Будем использовать обозначения:

$$\left. \begin{aligned} D &= \int_0^L Q^2 dx; & D^0 &= \int_0^L (Q^0)^2 dx; \\ \Delta^0 &= \frac{H^0 L}{EF} + aL(T - T^0) - \frac{D^0}{2(H^0)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

В этих обозначениях зависимость (18) имеет вид:

$$\Delta = \frac{HL}{EF} - \frac{D}{2H^2} - \Delta^0, \quad (20)$$

а если ввести безразмерные величины

$$\delta = \frac{\Delta}{L}; \quad \delta^0 = \frac{\Delta^0}{L}; \quad t = \frac{H}{EF},$$

то придем к соотношению

$$\delta = t - \frac{A}{t^2} - \delta^0, \quad (21)$$

где  $A = \frac{1}{2L} \int_0^L \left( \frac{Q}{EF} \right)^2 dx$  — параметр, характеризующий интенсивность поперечной нагрузки на нить.

График зависимости  $\delta$  от  $t$  при  $\delta^0 = 0$  представлен на рис. 26. Величину  $\delta^0$  можно учесть, если изменить начало отсчета. Из этого графика видно, что с уменьшением параметра  $A$  кривая  $t = t(\delta)$  прижимается к своим асимпто-

там и в пределе при  $A=0$  вырождается в две полупрямые:

$$\left. \begin{array}{l} t = \delta \text{ при } \delta \geq 0; \\ t = 0 \text{ при } \delta < 0. \end{array} \right\} \quad (22)$$

Тангенс угла наклона в произвольной точке кривой (21) характеризует податливость гибкой нити:

$$p = \frac{d\delta}{dt} = 1 + \frac{2A}{t^3}. \quad (23)$$

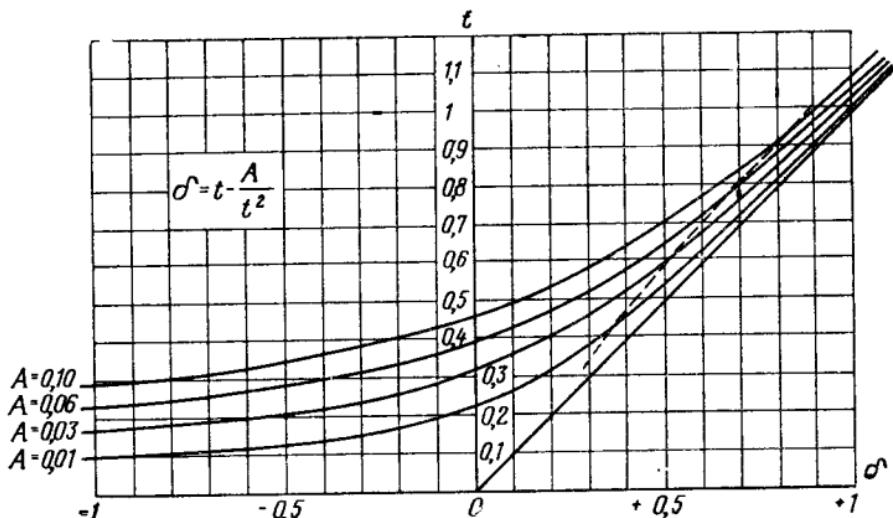


Рис. 26

В определенном смысле величина  $2A/t^3$  может рассматриваться как мера нелинейности гибкой нити, так как она определяет разницу между податливостью нити и стержня, имеющего такую же длину, модуль упругости и площадь поперечного сечения, как и гибкая нить. На графике пунктирной линией указана левая граница области, в которой мера нелинейности  $2A/t^3$  не превышает 10%. Эта область относительно невелика и соответствует достаточно высоким значениям безразмерного напряжения  $t$ . Следовательно, в подавляющем большинстве случаев необходимо считаться с нелинейным характером работы вантовых элементов.

Если представить, что из гипотетического нелинейно-упругого материала, у которого диаграмма «напряжение — относительное удлинение» имеет вид кривой, представленной на рис. 26, изготовлен стержень, то он может

заменить в расчетной схеме вантовый элемент. При этом геометрически нелинейная задача расчета вантово-стержневой системы подменяется физически нелинейной задачей расчета комбинированной стержневой системы из нелинейно-упругого материала. Такая трактовка, вообще говоря, не уменьшает трудности задачи, однако в некоторых случаях она облегчает анализ системы, главным образом за счет преодоления некоторых психологических затруднений. Более подробно об этом сказано ниже.

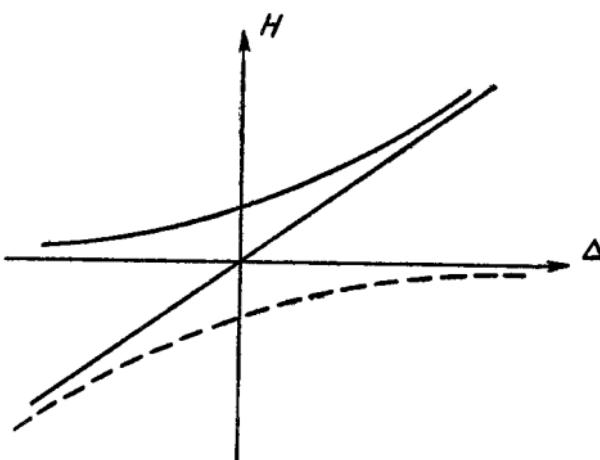


Рис. 27

В заключение отметим следующий факт. Гибкая нить не может воспринимать сжимающих усилий, так как при этом происходит потеря устойчивости. Но выражение (21) формально удовлетворяется и при значениях натяжения  $t < 0$ , которым соответствуют на плоскости  $t\delta$  точки, лежащие на пунктирной кривой (рис. 27). Чтобы не получить решений, относящихся к этой дополнительной ветви кривой, необходимо требовать положительности натяжения. Таким образом, соотношение (21) должно иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= t - \frac{A}{t^2} - \delta^0; \\ t &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Нетрудно показать, что при любых значениях геометрических и физических параметров пологой гибкой нити кубическое уравнение (21) имеет только один положительный корень [67]. Два других корня могут быть либо комплексными, либо отрицательными. Таким образом,

условия (24) определяют единственное значение натяжения, что, впрочем, достаточно ясно и из физических соображений.

## § 7. ВЛИЯНИЕ НАГРУЗКИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРОВЕСА, И ПРОДОЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Выше предполагалось, что нить нагружена лишь нагрузками, лежащими в плоскости  $XOY$ , а при выводе соотношений (19)–(24), кроме того, не учитывались нагрузки, параллельные оси  $OX$ . В этом параграфе мы рассмотрим влияние неучтенных ранее нагрузок.

Учет нагрузки, перпендикулярной плоскости  $XOY$ , производится совершенно элементарно. Повторяя приведенные в § 5 рассуждения для случая пространственного нагружения нити, легко получить выражение

$$\varepsilon = \frac{H - H^0}{EF} + \alpha(T - T^0) - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{Q_y^0}{H} \right)^2 + \left( \frac{Q_z^0}{H} \right)^2 - \left( \frac{Q_y}{H} \right)^2 - \left( \frac{Q_z}{H} \right)^2 \right], \quad (25)$$

где  $Q_y$  и  $Q_y^0$  — поперечные составляющие усилий в нити, действующие в плоскости  $XOY$ ;

$Q_z$  и  $Q_z^0$  — поперечные составляющие усилий в нити, действующие в плоскости  $XOZ$ .

Как видим, никаких принципиальных затруднений учет произвольной поперечной нагрузки в расчет не вносит.

Несколько более сложно обстоит дело с учетом продольных составляющих нагрузки. Дело в том, что в соответствии с приведенной в § 5 аналогией (см. табл. 1) натяжение нити можно трактовать как меру жесткости некоторой воображаемой линейной одномерной упругой системы, рассмотрение которой привело к выражению (7). Учет продольных составляющих внешней нагрузки приводит к тому, что натяжение становится переменным в пределах пролета, т. е. здесь возникают трудности, аналогичные тем, которые проявляются при расчете систем со стержнями переменной жесткости. Не являясь принципиальными, эти трудности тем не менее значительно усложняют расчетные формулы, и поэтому было бы желательно проанализировать вопрос о возможности прене-

брежения продольными составляющими внешней нагрузки.

Для проведения анализа рассмотрим нить, нагруженную равномерно распределенной поперечной нагрузкой и сосредоточенной продольной силой посередине пролета.

Величина  $\Delta$ , как и ранее, может быть получена на основании зависимости (17), однако выражение для относительного удлинения  $\varepsilon$  должно быть записано с учетом влияния продольной составляющей нагрузки. В частности, необходимо учесть, что продольная нагрузка меняет распределение поперечных составляющей усилий  $Q$ .

С определения величин  $Q$  мы и начнем анализ; при этом будем решать задачу по методу сил с использованием основной системы, показанной на рис. 28 (напомним, что относительно  $Q$  задача является статически неопределенной).

Поперечная составляющая усилия в месте разреза может быть определена из уравнения

$$Q_x = - \frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}}, \quad (26)$$

где

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{Q_1^2(x)}{H(x)} dx; \quad \delta_{1p} = \int_0^L \frac{Q_1(x) Q_p(x)}{H(x)} dx.$$

Интегрируя способом Верещагина, получим:

$$\delta_{11} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{H} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{H+P} = \frac{L}{2H} \left( 1 + \frac{1}{1+\eta_1} \right);$$

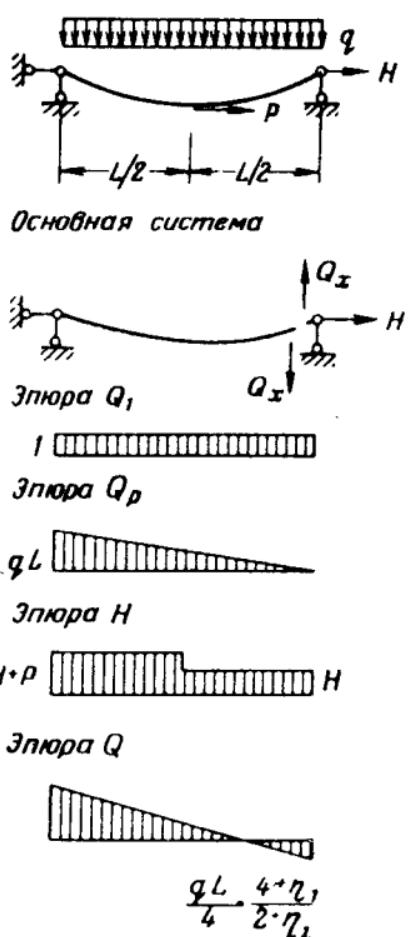


Рис. 28

$$\delta_{ip} = 1 \frac{L}{2} \cdot \frac{3qL}{4} \cdot \frac{1}{H} + 1 \frac{L}{2} \cdot \frac{qL}{4} \cdot \frac{1}{H+P} = \\ = \frac{qL^2}{8H} \left( 3 + \frac{1}{1+\eta_1} \right); \\ Q_x = - \frac{qL}{4} \cdot \frac{4+\eta_1}{2+\eta_1}; \\ \eta_1 = \frac{P}{H}.$$

Выражение для поперечной составляющей усилия в нити и натяжения:

$$H(x) = \begin{cases} H+P & \left( 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right); \\ H & \left( \frac{L}{2} \leq x \leq L \right); \end{cases} \quad (27)$$

$$Q(x) = \frac{qL}{4(2+\eta_1)} \left( 4 - \eta_1 + 2\eta_1 \frac{x}{L} \right). \quad (28)$$

Подстановка (27) и (28) в (16) и последующее интегрирование приводят к выражению

$$-\Delta_1 = \frac{HL}{EF} \left( 1 + \frac{\eta_1}{2} \right) - \frac{q^2 L^3}{24H^2} \left[ \frac{15,5\eta_1^2 + 11\eta_1 + 2}{(1+\eta_1)^2(2+4\eta_1)^2} + \right. \\ \left. + \frac{6,5\eta_1^2 + 7\eta_1 + 2}{(2+4\eta_1)^2} \right] = \frac{HL}{EF} k_1 - \frac{q^2 L^3}{24H^2} k_2. \quad (29)$$

В случае  $\eta_1=0$  получим выражение для нити, загруженной только поперечной равномерно распределенной нагрузкой:

Таблица 2

$$\Delta = \frac{HL}{EF} - \frac{q^2 L^3}{24H^2}. \quad (30)$$

$\tau_1$	$k_1$	$k_2$
0,02	0,01	0,988
0,04	1,02	0,986
0,06	1,03	0,967
0,08	1,04	0,962
0,10	1,05	0,947
0,12	1,06	0,933
0,14	1,07	0,927
0,16	1,08	0,917

Для других значений  $\eta_1$  данные приведены в табл. 2.

Как видно из этой таблицы, влияние продольной составляющей нагрузки мало, если величина  $\eta_1 \leq 0,15$ . Для того чтобы показать физический смысл этого ограничения, будем считать, что нить вертикальна и  $P=\eta_1 H$  есть вес нити, который может быть вы-

ражен через объемный вес материала нити, площадь поперечного сечения и длину, т. е.  $P = \gamma F L$ . Натяжение  $H$  представим как произведение напряжения на площадь.

Тогда

$$\eta_1 = \frac{\gamma F L}{\sigma F} = \frac{\gamma L}{\sigma}. \quad (31)$$

Для стальных канатов  $\gamma \approx 7 \text{ t/m}^3$ ,  $L \leq 500 \text{ m}$ ,  $[\sigma] \approx \approx 70000 \text{ T/m}^2$  и параметр  $\eta_1 \leq 0,04$ . Анализ целого ряда проектов различных сооружений показал, что величина  $\eta_1$  обычно находится в диапазоне 0,01—0,10, поэтому ниже мы не будем вообще учитывать продольных составляющих нагрузок, хотя это можно сделать за счет некоторого увеличения объема вычислений.

# Глава 3. СТАТИЧЕСКИЕ И КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СТЕРЖНЕВЫХ И ВАНТОВО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ МАЛЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

---

В этой главе мы рассмотрим некоторые основные свойства стержневых систем, расчет которых может быть выполнен без учета деформированной схемы. При этом будут рассматриваться чисто статическая и кинематическая стороны задачи. В отличие от установившейся традиции мы не будем предполагать справедливость обобщенного закона Гука, а наоборот, будем интересоваться лишь теми свойствами, которые относятся к системам общего типа с нелинейной зависимостью между усилиями и перемещениями. В качестве объекта исследования чаще всего будут рассматриваться произвольные шарнирно-стержневые системы (фермы). Однако результаты будут формулироваться в таком виде, чтобы их можно было относить к стержневым системам произвольного типа.

## § 8. МАТРИЦА ИНЦИДЕНЦИЙ И ЕЕ СВОЙСТВА

Прежде чем перейти к предмету настоящей главы приведем некоторые простейшие определения и понятия из теории графов [3, 31], которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

*Графом* называется множество элементов, называемых *ребрами*, и множество элементов, называемых *вершинами*, такие, что каждому ребру сопоставляются две вершины — его «концы» (необязательно различные).

Как следует из определения, каждому ребру соответствуют две вершины (в некоторых случаях они совпадают и ребро образует петлю, как это показано на рис. 29, а у вершины  $x$ ), но не каждой вершине соответствует ребро и в этом случае мы имеем дело с изолированной вершиной.

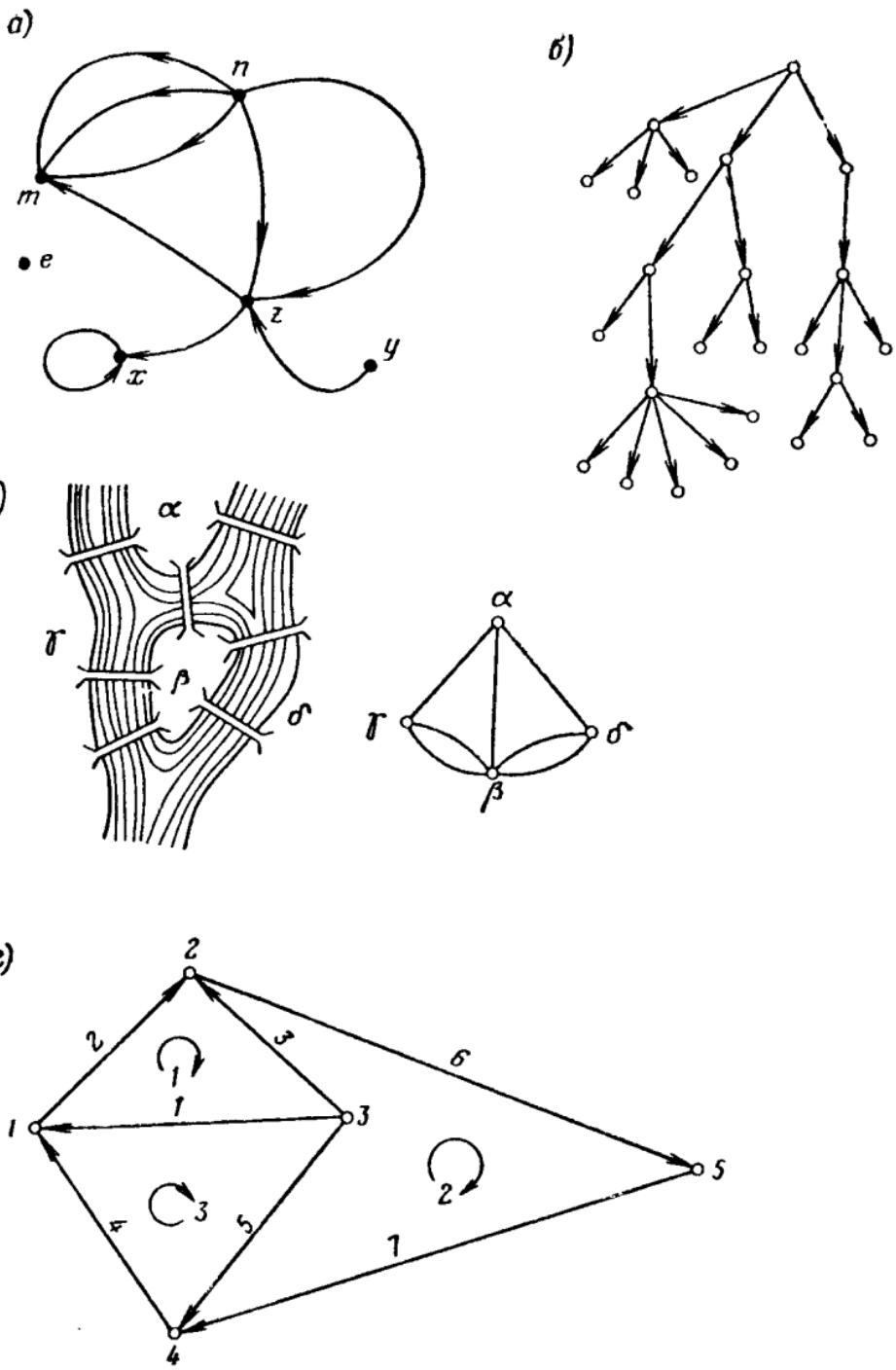


Рис. 29

ной (вершина  $e$  на рис. 29,  $a$ ). В дальнейшем будут применяться графы без петель и изолированных вершин.

Граф называют *ориентированным*, если у каждого из его ребер  $b_c$  различают начало и конец. Если ребро  $b_c$  начинается у вершины  $a_{y'}$  и оканчивается у вершины  $a_{y''}$ ,

то его обозначают  $\overrightarrow{a_{y'} \dots a_{y''}}$  (на схеме ориентация ребер обычно отмечается стрелкой) и называют *дугой* графа.

*Коэффициентами инцидентности* ориентированных ребер  $b_c = \overrightarrow{a_{y'}, y}$  с вершинами  $a_y$  называют величины:

$$d_{yc} = \begin{cases} +1, & \text{если } y = y''; \\ -1, & \text{если } y = y'; \\ 0, & \text{если } y' \neq y \neq y''. \end{cases} \quad (32)$$

Прямоугольная матрица, элементами которой являются величины  $d_{yc}$ , называется *первой матрицей инциденций* ориентированного графа.

Так, для графа, изображенного на рис. 29,  $g$ , первая матрица инциденций может быть записана в виде:

$$\left| \begin{array}{cccccc} +1 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 \end{array} \right|.$$

В этой матрице каждому ребру графа соответствует столбец, а каждой вершине — строка. Если ребро начинается у какой-либо вершины, то соответствующий элемент столбца равен  $-1$ , а если оно оканчивается, то соответствующий элемент равен  $+1$ . Так, в третьем столбце  $+1$  находится во второй строке (третье ребро оканчивается у второй вершины), а  $+1$  находится в третьей строке (это ребро начинается у третьей вершины). Поскольку каждое ребро имеет начало и конец в каждом столбце, то обязательно будут находиться два и только два ненулевых элемента.

Нетрудно показать, что, задавая:

а) первую матрицу инциденций  $\|d_{yc}\|$  для графа, полученного в результате упорядочения множества вершин и множества стержней некоторой фермы (нумерация и ориентация ребер графа произвольная);

б) матрицу координат узлов  $\|z_{yk}\|$  (индекс  $k$  принимает значения 1, 2, 3 для пространственного и 1, 2 для плоского случая);

в) векторы жесткостей стержней  $\|EF_c\|$ ,

мы имеем исчерпывающую информацию о расчетной схеме шарнирно-стержневой системы. Справедливость этого утверждения следует хотя бы из того факта, что перечисленных выше данных достаточно, чтобы построить чертеж фермы, а при помощи такого чертежа выполнить «ручной» расчет.

Используя введенную выше информацию, можно, например, получить длины всех стержней по известной формуле из аналитической геометрии:

$$l_c = \sqrt{\sum_k (\Delta_{ck})^2}, \quad (33)$$

где  $l_c$  — длина стержня;

$\Delta_{ck}$  — разность координат концов стержня, т. е. проекция стержня на координатную ось.

Эту разность в свою очередь легко получить из выражения

$$\Delta_{ck} = \sum_y z_{ky} d_{yc}, \quad (34)$$

которое легко может быть доказано, если обратить внимание на то обстоятельство, что для  $i$ -го стержня можно найти только два коэффициента инцидентности  $d_{y'i} = +1$  и  $d_{y''i} = -1$ , отличных от нуля. Следовательно, в развернутом виде, для координаты  $j$  выражение (34) запишется:

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} &= z_{j1} d_{1i} + z_{j2} d_{2i} + \cdots + z_{jy'} d_{y'i} + \cdots + \\ &\quad + z_{jy''} d_{y''i} + \cdots + z_{jy} d_{yt} = \\ &= z_{jy'} (+1) + z_{jy''} (-1) = z_{jy'} - z_{jy''}. \end{aligned} \quad (35)$$

Подстановка (34) в (32) дает окончательную форму записи

$$l_c = \sqrt{\sum_k \left( \sum_y z_{ky} d_{yc} \right)^2} = \sqrt{\sum_k \sum_y \sum_{y_1} z_{ky} d_{yc} d_{cy_1} z_{y_1 k}}. \quad (36)$$

Также нетрудно получить и элементы матрицы косинусов между направлениями стержней и осями координат:

$$C_{ck} = \frac{\Delta_{ck}}{l_c} = \frac{\sum_y z_{ky} d_{yc}}{\sqrt{\sum_k \sum_y \sum_{y_1} z_{ky} d_{yc} d_{cy_1} z_{y_1 k}}}. \quad (37)$$

Уже из этих простейших примеров видно, что использование такого элементарного понятия из теории графов, как первая матрица инциденций  $\|d_{yc}\|$ , полностью исключает необходимость обращаться к чертежу и позволяет формализовать те «очевидные» расчетные операции, которые при ручном счете обычно не фиксируются, но становятся ощутимым препятствием при попытке автоматизировать расчет.

Ниже, на примере все той же шарнирно-стержневой системы покажем, как может быть формализована и более сложная задача, а именно — составление уравнений для расчета статически неопределенной фермы. Возможность выполнения этой задачи без обращения к чертежу далеко не очевидна [64].

Выше были использованы некоторые простейшие свойства матрицы инциденций  $\|d_{yc}\|$ , в частности эта матрица использовалась как величина, с помощью которой удалось по заданной на множестве узлов  $U$  функции  $z_{yk} (y \in U)$  определить разность значений функций, определенную на множестве стержней  $C$ .

В настоящем параграфе мы постараемся определить некоторые простейшие правила для такого рода преобразований, выполняемых с помощью первой матрицы инциденций ориентированного графа.

В первую очередь отметим несколько элементарных преобразований:

$$d_{yc} d_{yc} = D_{yc}; \quad (38)$$

$$\frac{1}{2} (d_{yc} d_{yc} - d_{yc}) = D'_{yc}; \quad (39)$$

$$\frac{1}{2} (d_{yc} d_{yc} + d_{yc}) = D''_{yc}. \quad (40)$$

Первое из этих соотношений позволяет получить матрицы инциденций для неориентированного графа и может быть использована в тех случаях, когда по каким-либо причинам возникает необходимость рассматривать граф без учета ориентации его ребер.

Соотношения (39) и (40) дают нам возможность рассматривать отдельно начала и концы ребер, поскольку, как нетрудно убедиться,

$$D'_{yc} = \begin{cases} +1, & \text{если ребро } y \text{ начинается у вершины } c; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases}$$

$$D_{yc}'' = \begin{cases} +1, & \text{если ребро } y \text{ оканчивается у вершине } c; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Матрицы  $\|D_{yc}\|$ ,  $\|D_{yc}'\|$ ,  $\|D_{yc}''\|$ , вообще говоря, могут быть заданы и непосредственно, но нам казалось нелишним определить зависимости (38) — (40) для того, чтобы еще раз подчеркнуть ту мысль, что матрица  $\|d_{yc}\|$  является исчерпывающей информацией о структуре системы:

Ниже мы будем использовать свойства матрицы, связанные с умножением на нее:

$$\sum_y A_y d_{yc} = B_c; \quad (41)$$

$$\sum_c d_{yc} M_c = N_y. \quad (42)$$

Первое из этих соотношений уже было использовано выше. Оно дает возможность получить разность некоторых величин, определенных из множества  $U(y \in U)$  как функцию номера ребра  $c$ , соединяющего те вершины, для которых берется разность значений  $A_y$ . Таким образом, соотношение (41) определяет некоторое свойство «избирательного дифференцирования на ребре  $c$ », которым обладает операция умножения на  $\|d_{yc}\|$  со свертыванием по индексу  $y$ .

Второе соотношение определяет свойство «избирательного интегрирования в узле  $y$ », которым обладает операция умножения на  $\|d_{yc}\|$  со свертыванием по индексу  $c$ . В результате этой операции мы получаем для каждого узла сумму значений некоторых величин, заданных на множестве  $C(c \in C)$ , причем суммирование распространяется только на те ребра, которые инцидентны данной вершине.

Соотношениями (41) и (42) удобно пользоваться в задачах строительной механики, поскольку с их помощью формализуются многие выкладки.

Необходимо отметить, что эти операции не являются взаимообратными, т. е. если

$$\sum_y A_y d_{yc} = B_c; \quad \sum_c B_c d_{cy} = C_y, \quad (43)$$

то

$$A_y \neq C_y. \quad (44)$$

Наконец, можно привести еще и преобразования, связанные уже не с матрицей  $\|d_{yc}\|$ , а с матрицами  $\|D_{yc}'\|$  и  $\|D_{yc}''\|$ :

$$\sum_y A_y D_{yc}' = B_c'; \quad (45)$$

$$\sum_y A_y D_{yc}^* = B_c^*. \quad (46)$$

В этих преобразованиях матрицы  $\|D_{yc}^*\|$  и  $\|D_{yc}\|$  выполняют роль своеобразных «сортировщиков», отсеивая друг от друга величины, относящиеся к различным концам ребер графа.

Интересно отметить, что введенные Л. Г. Дмитриевым [16] дискретные операторы могут быть получены на основании рассмотренных свойств матрицы инциденций. Так, например, «суммирующий» оператор для узла  $k$  эквивалентен умножению на матрицу  $\|d_{yc}\|$  со свертыванием по индексу  $c$ , т. е. результат воздействия этого оператора на некоторую величину  $M_c$ , заданную на множестве  $C$ , равен величине  $N_y$ , определенной по формуле (42). Другие операторы также можно получить на основании свойства матрицы инциденций.

## § 9. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СВОБОДНОЙ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Обозначим через  $\bar{P}_y$  векторы внешних узловых нагрузок, а через  $\bar{S}_{yc}$  векторы продольных усилий в стержнях, точнее — пару векторов, которая характеризует действие стержня на узлы, к которым он примыкает. Следует обратить внимание на то, что  $\bar{S}_{yc}$  является функцией не только номера стержня, но и номера узла, чем учитывается известное правило знаков — усилие в стержне положительно, если  $\bar{S}_{yc}$  направлены от узлов в сторону стержня.

Пара векторов  $\bar{S}_{yc}$  обладает следующими свойствами:

- а) обе компоненты этой пары направлены вдоль стержня;
- б) обе компоненты имеют равные модули  $S_c$ , а направления их взаимно противоположны.

Если ввести в рассмотрение вектор  $\bar{l}_c$ , модуль которого равен длине стержня  $l_c$ , а направление совпадает с принятым положительным направлением стержня (оно обозначено стрелкой на графике), то можно записать

$$\bar{S}_{yc} = \frac{\bar{l}_c}{l_c} S_c d_{cy}. \quad (47)$$

Условия равновесия узлов свободной формы можно представить в виде векторных равенств

$$\sum_c \bar{S}_{yc} + \bar{P}_y = 0. \quad (48)$$

Если выразить  $\bar{P}_y$  через координатные орты:

$$\bar{P}_y = \sum_k P_{yk} \bar{e}_k, \quad (49)$$

где  $P_{yk}$  — проекции узловых нагрузок на координатные оси, то (48) можно представить в виде:

$$\sum_c \frac{\bar{l}_c}{l_c} S_c d_{yc} + \sum_k P_{yk} \bar{e}_k = 0. \quad (50)$$

Умножим (50) скалярно на  $\bar{e}_k$ , учитывая при этом, что скалярные произведения ортов равны<sup>1</sup>:

$$\bar{e}_k \bar{e}_{k_1} = \delta_{kk_1} = \begin{cases} 1 & (k = k_1); \\ 0 & (k \neq k_1). \end{cases} \quad (51)$$

$$\bar{l}_c \bar{e}_k = \Delta_{ck}. \quad (52)$$

После умножения окончательно получим систему уравнений

$$\sum_c \frac{\Delta_{ck}}{l_c} d_{yc} S_c + \sum_y P_{yk} \delta_{kk_1} = 0. \quad (53)$$

или

$$\sum_c C_{kc} S_c d_{yc} + P_{yk} = 0 \quad (54)$$

$$(y = 1, 2, \dots, \bar{y}; k = 1, 2, 3).$$

Свойства полученной системы линейных уравнений относительно неизвестных модулей внутренних усилий  $S_c$  целиком определяются матрицей коэффициентов системы. Интересно отметить, что эта матрица является трехмерной, а ее привычная запись в виде

$$\left| \begin{array}{cccccc} C_{11} d_{11} & C_{12} d_{12} & \cdots & C_{1\bar{c}} d_{1\bar{c}} \\ C_{11} d_{21} & C_{12} d_{22} & \cdots & C_{1\bar{c}} d_{2\bar{c}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{11} d_{\bar{y}1} & C_{12} d_{\bar{y}2} & \cdots & C_{1\bar{c}} d_{\bar{y}\bar{c}} \\ \hline C_{21} d_{11} & C_{22} d_{12} & \cdots & C_{2\bar{c}} d_{1\bar{c}} \\ C_{21} d_{21} & C_{22} d_{22} & \cdots & C_{2\bar{c}} d_{2\bar{c}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{21} d_{\bar{y}1} & C_{22} d_{\bar{y}2} & \cdots & C_{2\bar{c}} d_{\bar{y}\bar{c}} \\ \hline C_{31} d_{11} & C_{32} d_{12} & \cdots & C_{3\bar{c}} d_{1\bar{c}} \\ C_{31} d_{21} & C_{32} d_{22} & \cdots & C_{3\bar{c}} d_{2\bar{c}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{31} d_{\bar{y}1} & C_{32} d_{\bar{y}2} & \cdots & C_{3\bar{c}} d_{\bar{y}\bar{c}} \end{array} \right| \rightarrow \begin{matrix} (c) \\ (y) \\ (k) \end{matrix}$$

<sup>1</sup> Напомним, что расчет ведется по недеформированной схеме.

является по существу представлением пространственной матрицы  $\|C_{ck}d_{yc}\|$  при помощи сечений ориентации  $k$  [81].

Введем новый индекс  $u$ , меняющийся от единицы до значения  $\bar{u} = \bar{y}k$  и связанный с индексами  $y$  и  $k$  соотношением

$$u = y + \bar{y}k - \bar{y}. \quad (55)$$

Тогда матрица  $\|C_{ck}d_{yc}\|$  может быть записана в виде  $\|A_{uc}\|$ , а элементы последней вычислены по формуле

$$A_{uc} = C_{ck}d_{yc}(u = y + \bar{y}k - \bar{y}). \quad (56)$$

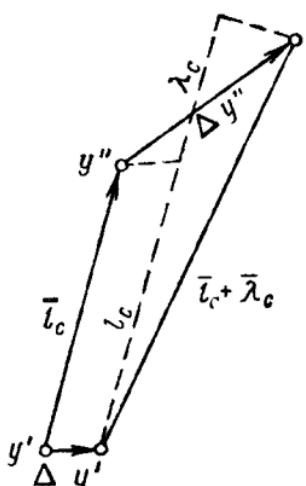
В этих обозначениях система уравнений равновесия может быть представлена в таком виде:

$$\sum_c A_{uc} S_c + P_u = 0 \quad (57)$$

$$(u = 1, 2, \dots, \bar{u}).$$

## § 10. КИНЕМАТИКА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЬЕВОЙ СИСТЕМЫ

Предположим, что стержни фермы получили некоторые малые удлинения  $\lambda_c$ , а узлы — совместные с этими удлинениями перемещения  $\bar{\Delta}_y$ . Разность проекций перемещений концевых узлов стержня на ось стержня равна его удлинению (рис. 30), что с учетом свойств матрицы инциденций может быть записано в виде векторного равенства



$$\bar{\lambda}_c = \sum_y \bar{\Delta}_y d_{yc}. \quad (58)$$

Вектор  $\bar{\lambda}_c$  с модулем  $\lambda_c$  направлен вдоль оси стержня, т. е.

$$\bar{\lambda}_c = \frac{\bar{l}_c}{l_c} \lambda_c, \quad (59)$$

а векторы  $\bar{\Delta}_y$  могут быть представлены своими разложениями на координатные орты:

$$\bar{\Delta}_y = \sum_k \Delta_{yk} \bar{e}_k, \quad (60)$$

где  $\Delta_{yk}$  — проекция перемещения узла  $y$  на  $k$ -ю координатную ось.

С учетом (59) и (60) основное уравнение (58) представим так:

$$\sum_y \sum_k d_{cy} \Delta_{yk} \bar{e}_k - \lambda_c \frac{\bar{l}_c}{l_c} = 0. \quad (61)$$

Умножим уравнение (61) скалярно на орт стержня:

$$\sum_y \sum_k d_{cy} \Delta_{yk} \bar{e}_k \frac{\bar{l}_c}{l_c} - \lambda_c \frac{\bar{l}_c}{l_c} \cdot \frac{\bar{l}_c}{l_c} = 0 \quad (62)$$

и учтем, что

$$\frac{\bar{l}_c}{l_c} \cdot \frac{\bar{l}_c}{l_c} = 1, \quad (63)$$

$$\bar{e}_k \frac{\bar{l}_c}{l_c} = C_{kc}. \quad (64)$$

Тогда основное кинематическое уравнение приобретет вид:

$$\sum_c \sum_y C_{kc} d_{cy} \Delta_{yk} - \lambda_c = 0 \quad (65)$$

или с учетом (56):

$$-\sum_u A_{cu} \Delta_u + \lambda_c = 0 \quad (66)$$

$$(c = 1, 2, \dots, \bar{c}).$$

Матрица коэффициентов этого уравнения  $\| -A_{cu} \|$  является транспонированной с обратным знаком матрицей коэффициентов системы уравнений равновесия (57). Этот результат не случайный, он является общим для любых систем, рассчитываемых по недеформированной схеме, и может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** Система линейных уравнений равновесия и система линейных кинематических уравнений, записанные для произвольной стержневой системы, при расчете по недеформированной схеме образуют двойственную пару, в том смысле, что:

а) неизвестные одной системы и свободные члены другой системы являются соответствующими друг другу обобщенными силами и обобщенными перемещениями;

б) матрица коэффициентов одной системы может быть получена из другой путем транспонирования с переменой знака.

Для произвольных шарнирно-стержневых систем эта теорема по сути доказана выше, что же касается систем

более общего вида, то доказательство производится аналогично. В частности, можно воспользоваться понятием дисковой системы, которую можно рассматривать как ферму, и выполнить предельный переход, как это сделано в монографии А. А. Уманского [86].

## § 11. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ И КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При выводе уравнений (57) и (66), кроме предположения о малости перемещений, никакие другие ограничения не вводились, поэтому эти уравнения справедливы для любого количества стержней  $s$  и узлов  $y$ , а также для плоского ( $\bar{k}=2$ ) и пространственного ( $\bar{k}=3$ ) случая. В связи с этим возникает вопрос о разрешимости полученных систем линейных уравнений, которым мы займемся в этом параграфе.

Прежде всего рассмотрим тот случай, когда система уравнений равновесия (57) такова, что все внутренние усилия могут быть определены из нее однозначно при произвольных нагрузках  $P_u$ . Для этого, как известно из линейной алгебры [74], необходимо и достаточно, чтобы число уравнений равнялось числу неизвестных, а определятель системы был отличен от нуля, т. е. должно быть:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{c} = \bar{u}; \\ \det \|A_{uc}\| \neq 0. \end{array} \right\} \quad (67)$$

Системы, обладающие такими свойствами, являются *статически определимыми*. Ниже для сокращения записи мы их будем иногда обозначать символом  $S^+$ , если же для определения всех внутренних усилий уравнений равновесия недостаточно, то мы будем употреблять символ  $S^-$  и называть такие системы *статически неопределеными*.

Замечательными свойствами систем  $S^+$  (статически определимых) являются:

- а) возможность представить все внутренние усилия в виде линейных комбинаций внешних нагрузок;
- б) справедливость принципа независимости действия сил.

Первое следует непосредственно из предположения о разрешимости системы линейных уравнений (57). Дей-

ствительно, если справедливы условия (67), то существует обратная матрица

$$\|A_{uc}\| = \|A_{uc}\|^{-1}, \quad (68)$$

через элементы которой выражаются все неизвестные внутренние усилия:

$$S_c = \sum_u a_{cu} P_u \quad (c=1, 2, \dots, \bar{c}). \quad (69)$$

Что касается второго свойства систем  $S^+$ , то справедливость его вытекает из выражения (69). Следует отметить, что в общем случае систем из нелинейно-упругих элементов линейные выражения (69) относятся только к статически определимым системам, для систем типа  $S^-$  они не могут быть применены.

Рассмотрим теперь случай, характеризуемый неравенством

$$\bar{c} > \bar{u}. \quad (70)$$

Здесь в свою очередь могут быть рассмотрены две возможности:

- а) ранг матрицы  $\|A_{cu}\|$  равен  $\bar{u}$  ( $r = \bar{u}$ );
- б) ранг матрицы  $\|A_{cu}\|$  меньше  $\bar{u}$  ( $r < \bar{u}$ ).

В случае  $r = \bar{u}$ , как известно из линейной алгебры [74], однородная система линейных уравнений

$$\sum_u A_{cu} \Delta_u = 0 \quad (c=1, 2, \dots, \bar{c} > \bar{u}) \quad (71)$$

может иметь только нулевое решение:

$$\Delta_u \equiv 0. \quad (72)$$

Если же  $r < \bar{u}$ , то система (71) имеет кроме тривиального решения (72) еще и ненулевые решения, т. е. изучаемая стержневая система допускает существование ненулевых узловых смещений  $\Delta_u$  без удлинений ее элементов (все деформации  $\lambda_c = 0$ ). Последнее свойство называют *геометрической изменяемостью*. Ниже мы его будем отмечать символом  $\Gamma^+$ , а противоположное ему свойство, характеризуемое отсутствием всех узловых перемещений при нулевых деформациях (*геометрическая неизменяемость*), обозначим символом  $\Gamma^-$ .

Итак, можно отметить, что система обладает свойством  $\Gamma^-$ , если  $r = \bar{u} < \bar{c}$ , и обладает свойством  $\Gamma^+$ , если

$r < \bar{u} < \bar{c}$ , причем для системы  $\Gamma^-$  однородная задача (72) имеет только нулевые решения.

Для анализа системы линейных уравнений равновесия (57) воспользуемся известной алгебраической теоремой [84].

**Теорема 2.** Система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_c A_{uc} S_c + P_u = 0 \quad (\text{а})$$

совместна тогда и только тогда, когда для любого решения

$$\Delta = \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_u \quad (\text{б})$$

сопряженной двойственной однородной системы уравнений

$$\sum_u A_{cu} \Delta_u = 0 \quad (\text{в})$$

справедливо соотношение

$$\sum_u P_u \Delta_u = 0. \quad (\text{г})$$

В том случае когда речь идет о геометрически неизменяемой системе  $\Gamma^-$ , условия (г) выполняются всегда. Если же рассматривается система  $\Gamma^+$ , то условие (г) теоремы выделяет из бесчисленного множества нагрузок определенный класс, который можно было бы назвать *равновесными нагрузками*, отличительной особенностью которого является то обстоятельство, что под воздействием нагрузок этого класса геометрически изменяемая система находится в равновесии.

Следует отметить, что ограничения типа условия (г) теоремы не исключают полностью какие-либо нагрузки. Действительно, две равные и противоположно направленные силы, приложенные вдоль оси стержня, уравновешиваются в его пределах. Следовательно, всегда можно сконструировать нагрузку так, как это показано на рис. 31, причем для любой линейной комбинации таких попарно равных сил полученная нагрузка будет относиться к классу равновесных.

Кроме вопроса о совместности системы уравнений равновесия следует еще рассмотреть вопрос о том, какой вид имеет решение системы (57). В линейной алгебре доказывается, что если ранг матрицы коэффициентов системы  $\bar{u}$  уравнений с  $\bar{c}$  неизвестными ( $\bar{u} < \bar{c}$ ) равен  $r$ , то достаточно решить лишь те  $r$  уравнений, которые со-

держат главный определитель, относительно тех  $r$  неизвестных, коэффициенты при которых входят в главный определитель. Это решение дает выражение для  $r$  неизвестных в виде линейных функций остальных ( $\bar{c}-r$ ) неизвестных, значения которых остаются независимыми

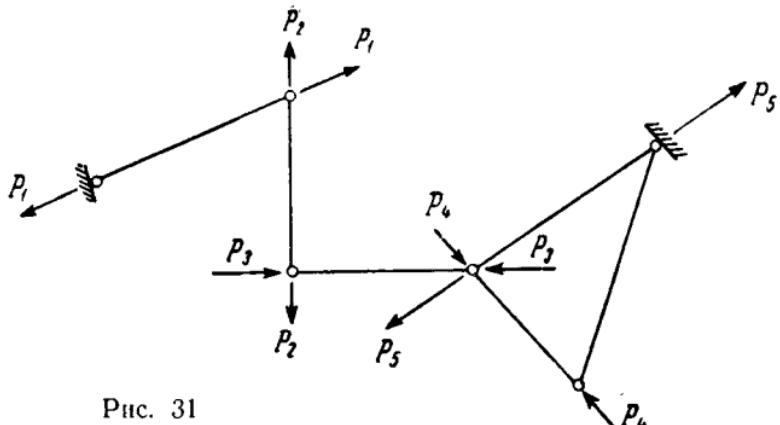


Рис. 31

и совершенно произвольными, т. е. можно получить линейные соотношения типа:

$$S_{c_i} = \sum_u a_{c_i u} P_u + \sum_{c_j} b_{c_i c_j} S_{c_j} \quad (73)$$

$$(c_i = c_1, c_2, \dots, c_r; c_j = c_{r+1}, c_{r+2}, \dots, c_{\bar{c}}).$$

Из формулы (73) следует возможность существования ( $\bar{c}-r$ ) независимых самонапряженных состояний, т. е. таких наборов внутренних усилий ( $S_1^0, S_2^0, \dots, S_{\bar{c}}^0$ ), которые удовлетворяют уравнениям равновесия при нулевой внешней нагрузке. Свойство системы иметь самонапряженные состояния будем ниже обозначать символом  $P^+$ , противоположное свойство — символом  $P^-$ .

Очевидно, что в статически определимых системах  $S^+$  нельзя создать ни одного самонапряженного состояния, т. е. система со свойствами  $S^+, P^+$  неосуществима. Справедливость этого утверждения следует из того, что для выполнения  $S^+$  необходимо, чтобы ранг матрицы  $\|A_{uc}\|$  был равен  $\bar{c}$  и, следовательно, количество самонапряженных состояний  $\bar{c}-c=0$ .

Нам остается лишь отметить, что в случае, характеризуемом неравенством

$$\bar{c} < \bar{u}, \quad (74)$$

ранг матрицы  $\|A_{uc}\|$  всегда меньше, чем  $\bar{u}$ , т. е. система обладает свойством  $\Gamma^+$ . Следует иметь в виду, что такие системы могут при определенных соотношениях длии элементов допускать лишь очень малые перемещения при произвольной нагрузке. Этот особый случай геометрически изменяемых систем, названный по предложению И. М. Рабиновича [62] *мгновенно-жесткими системами*, нашел довольно широкое применение в различных типах висячих покрытий. Аналитическое исследование таких систем можно найти в работе [36], многие интересные свойства этих систем указаны в [33].

## § 12. СТАТИЧЕСКИЕ И КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВАНТОВО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В строительной механике стержневых систем понятия статической определимости и неопределенности, геометрической изменяемости и неизменяемости обычно связывают с такими свойствами, как возможность существования самонапряженных состояний (только у статически неопределенных систем), равновесие под воздействием произвольной системы сил (статически опре-

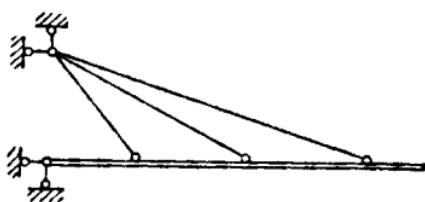


Рис. 32

делимые и неопределенные неизменяемые системы), возможность вычисления равнодействующих внутренних усилий без определения перемещений (только у статически неопределенных систем) и т. п. Однако известно и то, что некоторые типы стержневых систем обладают «переходными» свойствами [58], позволяющими отнести их одновременно к различным классам.

В частности, к таким переходным типам сооружений могут относиться и вантово-стержневые системы, в чем легко убедиться, если рассмотреть консольную вантовую систему, показанную на рис. 32. Нетрудно заметить, что эта система объединяет в себе свойства трех различных типов систем:

а) она может находиться в равновесии не при всякой нагрузке и, следовательно, по этому признаку должна быть отнесена к геометрически изменяемым системам  $\Gamma^+$ ;

б) она не может иметь самонапряженных состояний  $P^-$ , что является признаком статически определимых систем;

в) усилия в этой системе не могут быть определены только на основании уравнений равновесия, и по этому признаку система может быть объявлена статически непределимой.

Такие свойства вантово-стержневых систем связаны со спецификой работы вантовых элементов, не способных воспринимать сжимающие усилия, т. е. с требованием о положительности всех напряжений:

$$H_b > 0 \quad (b = 1, 2, \dots, \bar{b}). \quad (75)$$

В более общей постановке можно говорить о том, что некоторые из элементов системы являются односторонними связями и усилия в этих элементах ограничены неравенствами типа:

$$S_{c_v} > 0 \quad (v=1, 2, \dots, \bar{v} \leq \bar{c}). \quad (75a)$$

Возникает естественный вопрос, какие сочетания свойств «обычных» стержневых систем могут встретиться в системах, где требуется выполнение неравенств типа (75). Иначе, какие из сочетаний свойств  $(\Gamma^+, P^+, S^+)$ ;  $(\Gamma^+, P^+, S^-)$ ;  $(\Gamma^+, P^-, S^+)$ ;  $(\Gamma^+, P^-, S^-)$ ;  $(\Gamma^-, P^+, S^+)$ ;  $(\Gamma^-, P^+, S^-)$ ;  $(\Gamma^-, P^-, S^+)$ ;  $(\Gamma^-, P^-, S^-)$  могут иметь место в том случае, когда на внутренние усилия (все или некоторые) наложено требование неотрицательности.

Ответ на этот вопрос дают следующие теоремы.

**Теорема 3.** Геометрически неизменяемая система, в которой некоторые (или все) элементы могут воспринимать усилия только одного знака, не может быть статически определимой.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что может существовать система  $\Gamma^-$  (геометрически неизменяемая) и статически определимая  $S^+$ . Но тогда система уравнений равновесия совместна, так как она неизменяема и однозначно разрешима относительно усилий в элементах, а также статически определима, поэтому ее можно записать [см. (61)]:

$$\begin{aligned} S_c &= \sum_u a_{cu} P_u. \\ (c &= 1, 2, \dots, \bar{c}). \end{aligned} \quad (76)$$

Пусть в элементах  $c_v$  ( $v=1, 2, \dots, \bar{v}$ ) усилия должны быть определенного знака, например положительными. Вычисляя их по формуле (75), мы можем встретить два случая:

а) неравенства  $S_{c_v} > 0$  нарушены;

б) неравенства  $S_{c_v} > 0$  не нарушены. В этом случае при переносе знаков всех внешних сил они нарушаются. В обоих случаях, следовательно, можно указать нагрузки, при которых элементы  $c_v$  выключаются из работы, при этом в системе уравнений равновесия можно не рассматривать соответствующие столбцы, а в двойственной ей системе кинематических уравнений (см. теорему 1) выпадают соответствующие строки. Но при этом система кинематических уравнений будет иметь больше неизвестных, чем уравнений, и однородная система

$$\sum_u A_{cu} \Delta_u = 0 \quad (c \neq c_v) \quad (77)$$

уже не будет иметь только нулевое решение. Это обстоятельство характерно для геометрически изменяемых систем  $\Gamma^+$ , что противоречит нашему предположению и доказывает теорему.

**Следствие.** Если система имеет элементы, воспринимающие усилия только одного знака, то она не может обладать свойствами  $(\Gamma^-, P^+, S^+)$  и  $(\Gamma^-, P^-, S^+)$ .

**Теорема 4.** В геометрически неизменяемой статически неопределенной системе всегда можно создать по крайней мере одно отличное от нуля самонапряженное состояние, удовлетворяющее системе однородных линейных уравнений равновесия

$$\sum_c A_{uc} S_c = 0 \quad (c = 1, 2, \dots, \bar{c}) \quad (78)$$

и ограничениям-неравенствам на знаки некоторых (или всех) внутренних усилий

$$S_{c_v} \geq 0 \quad (v = 1, 2, \dots, \bar{v} \leq \bar{c}). \quad (79)$$

Доказательство основано на известной в теории линейных неравенств теореме Таккера [84], гласящей, что система однородных линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (80)$$

имеет неотрицательное нетривиальное решение

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (81)$$

если не найдутся числа

$$u_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (82)$$

подстановка которых в левую часть двойственной однородной системы приводит к строгим неравенствам

$$\sum_{i=1}^m A_{ji} u_i > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (83)$$

Но в случае геометрически неизменяемой системы двойственная однородная система

$$\sum_u A_{cu} \Delta_u = 0 \quad (c = 1, 2, \dots, \bar{c}) \quad (84)$$

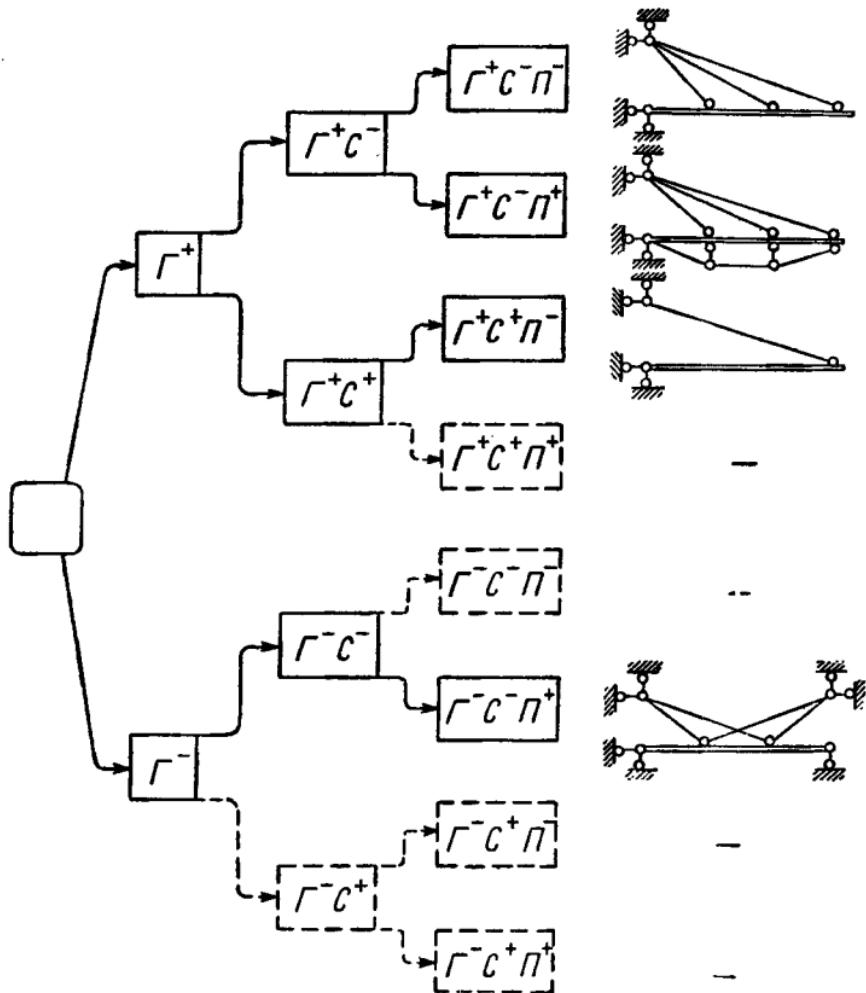


Рис. 33

имеет только нулевые решения и не существуют перемещения  $\Delta_u$  ( $u=1, 2, \dots, u$ ), которые бы приводили к строгим неравенствам типа (83). Следовательно, есть по крайней мере один набор неотрицательных неравных одновременно нулю неизвестных (79), удовлетворяющих системе уравнений равновесия (78). Теорема доказана.

**Следствие.** *Не существуют системы, обладающие свойствами  $(\Gamma^-, S^-, \Pi^-)$  и  $(\Gamma^-, S^+, \Pi^-)$ .*

К доказанному выше можно добавить очевидную теорему.

**Теорема 5.** *В статически определимой системе невозможно создать отличное от нуля самонапряженное состояние.*

Из этой теоремы следует, что не существует систем со свойствами  $(\Gamma^+, S^+, \Pi^+)$  и  $(\Gamma^-, S^+, \Pi^+)$ .

Что касается оставшихся сочетаний  $(\Gamma^-, S^-, \Pi^+)$ ;  $(\Gamma^+, S^+, \Pi^-)$ ;  $(\Gamma^+, S^-, \Pi^+)$  и  $(\Gamma^+, S^-, \Pi^-)$ , то такие свойства могут сочетаться в системах со связями, воспринимающими усилия только одного знака. Элементарные примеры таких систем (вантово-стержневых) приведены на рис. 33. Таким образом, на поставленный в начале этого параграфа вопрос дан исчерпывающий ответ.

## Глава 4. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ВАНТОВО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ И ОСНОВЫ МЕТОДА СИЛ

---

### § 13. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ВАНТОВО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Обычно в строительной механике термин «статически определимая система» применяется по отношению к геометрически неизменяемым конструкциям, поэтому использование этого термина применительно к вантово-стержневым системам является непривычным. Некоторая психологическая скованность, которая появляется при чтении слов «статически определимая вантово-стержневая система», по-видимому, объясняется тем обстоятельством, что гибкие нити являются многократно (точнее бесконечнократно) геометрически изменяемыми объектами.

В связи со сказанным выше может оказаться целесообразным представлять нить в виде прямого стержня из гипотетического нелинейно-упругого материала, для которого диаграмма «напряжение — относительное удлинение» имеет характер кривой, представленной на рис. 26. Анализ такой системы, у которой часть элементов изготовлена из материала, не подчиняющегося закону Гука, не представляет никаких трудностей, и понятие о статической определимости здесь полностью совпадает с общепринятым, т. е. статически определимой считается такая система, в которой усилия определяются только из уравнений равновесия. Следует отметить, что для гибких нитей в таких системах из условий статики вычисляются только натяжения. Что касается поперечных составляющих усилий в нитях, то для их определения, вообще говоря, необходимо рассматривать условия неразрывности, т. е. говоря о статически определимой вантово-стержневой системе, мы имеем в

виду системы, статически определимые относительно напряжений по терминологии, введенной в § 5.

Продолжая рассматривать аналогию между вантово-стержневой системой и некоторой физически-нелинейной стержневой системой, получим аналог формулы Максвелла — Мора для определения перемещений. Для этого воспользуемся принципом возможных изменений напряженного состояния [77], который формулируется следующим образом.

*Если деформация системы согласована с наложенными на нее связями, то при всяком возможном (удовлетворяющем условиям равновесия) бесконечно малом изменении напряженного состояния сумма возможных работ приращений всех внешних сил, производимых на соответствующих им перемещениях, статически вызванных самими силами, равна приращению дополнительной энергии деформации системы.*

Как показано в работе [77], приращение дополнительной энергии деформаций системы может быть получено как интеграл по всему объему тела от суммы произведений из приращений напряжений на соответствующие действительные полные деформации или в символической записи:

$$\delta U^* = \int_V \left( \sum_i \varepsilon_i \delta \sigma_i \right) dV. \quad (85)$$

Сумма возможных работ приращений всех внешних сил (приращение дополнительной работы) выражается так:

$$\delta W^* = \sum_j \Delta_j \delta P_j \quad (86)$$

и, следовательно,

$$\sum_j \Delta_j \delta P_j = \int_V \left( \sum_i \varepsilon_i \delta \sigma_i \right) dV. \quad (87)$$

Здесь обозначено (см. рис. 34):  $\Delta_j$  — действительные перемещения точек приложения внешних сил, возникающие под воздействием сил  $P_j$ ;  $\varepsilon_i$  — действительные полные деформации, возникающие от системы сил  $P_j$ , вычисленные с учетом начальных относительных деформаций (например, температурных);  $\delta P_j$ ,  $\delta \sigma_i$  — согласованные возможные (т. е. удовлетворяющие условиям равновесия) бесконечно малые приращения внешних сил и напряжений;  $dV$  — элемент объема.

Применим принцип возможных изменений напряженного состояния к произвольной статически определимой вантово-стержневой системе. Предполагая, что система состоит из стержней (элементов, работающих только на растяжение-сжатие), изгибаемых участков (элементов, работающих только на изгиб) и вантовых

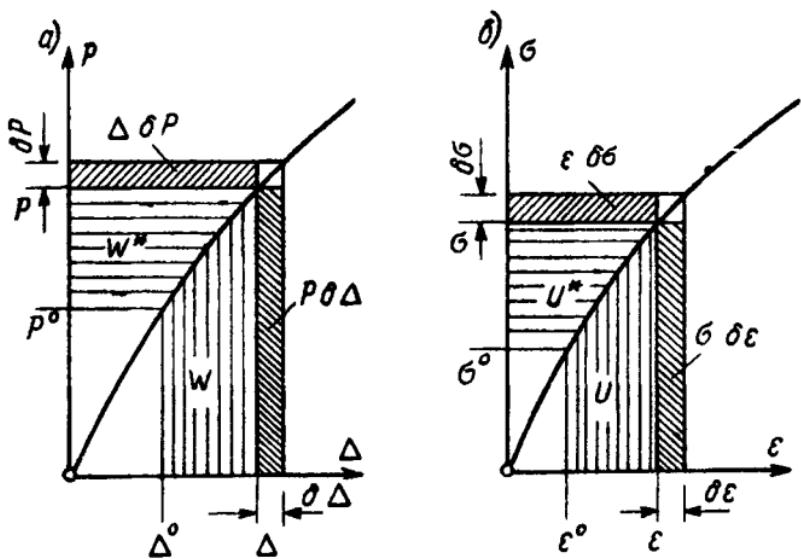


Рис. 34

элементов (гибких нитей), (85) можно записать в таком виде:

$$dU^* = \sum_c \int \varepsilon_c \delta N_c dl_c + \sum_y \int \varepsilon_y \delta M_y ds_y + \sum_b \int \varepsilon_b \delta H_b dl_b, \quad (88)$$

где  $\varepsilon_c = \frac{N_c - N_c^0}{EF_c} + \alpha (T_c - T_c^0)$  — относительные удлинения в стержнях, соответствующие переходу системы из исходного в исследуемое состояние;  $\varepsilon_y = \frac{M_y - M_y^0}{EJ_y}$  — относительные взаимные углы поворота в участках, соответствующие переходу из исходного состояния в исследуемое;

$$\varepsilon_b = \frac{H_b - H_b^0}{EF_b} + \alpha (T_b - T_b^0) - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{Q_b}{H_b} \right)^2 - \left( \frac{Q_b^0}{H_b^0} \right)^2 \right] - \text{относи-}$$

тельные удлинения вантовых элементов, соответствующие переходу из исходного состояния в исследуемое.

Нетрудно заметить, что величины  $\delta N_c$ ,  $\delta M_y$  и  $\delta H_b$  входят в выражение (88) линейно, а приращение дополнительной работы  $\delta W^*$  также линейно зависит от  $\delta P_j$ . Это дает нам возможность от бесконечно малых величин, характеризующих возможное изменение напряженного состояния, перейти к величинам конечным и, в частности, рассмотреть тот случай, когда приращения всех внешних сил сводятся к появлению только одной дополнительной единичной силы по некоторому направлению  $n$ , т. е.  $\delta P_n = 1$ . Так как  $\delta N_c$ ,  $\delta M_y$  и  $\delta H_b$  должны удовлетворять только условиям равновесия, а последние линейны (при расчете по недеформированной схеме), то следует принять:

$\delta N_c = n_{cn}$  — усилие в  $c$ -м стержне от воздействия единичной силы по направлению  $n$ ;

$\delta M_y = m_{yn}$  — изгибающий момент в  $y$ -м участке от единичной силы по направлению  $n$ ;

$\delta H_b = h_{bn}$  — натяжение  $b$ -го вантового элемента от единичной силы по направлению  $n$ .

Если  $\Delta_n$  — проекция действительного перемещения точки приложения единичной силы на направление  $n$ , то основное уравнение принципа возможных изменений напряженного состояния приобретает такой вид:

$$\begin{aligned} \Delta_n \cdot 1 = & \sum_c \int \left[ \frac{N_c - N_c^0}{EF_c} + \alpha (T_c - T_c^0) \right] n_{cn} dl_c + \\ & + \sum_y \int \frac{M_y - M_y^0}{EJ_y} m_{yn} ds_y + \sum_b \int \left\{ \frac{H_b - H_b^0}{EF_b} + \right. \\ & \left. + \alpha (T_b - T_b^0) - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{Q_b}{H_b} \right)^2 - \left( \frac{Q_b^0}{H_b^0} \right)^2 \right] \right\} h_{bn} dl_b. \quad (89) \end{aligned}$$

Выражение (89) является аналогом формулы Максвелла — Мора для вантово-стержневых систем. Замечательная особенность этого выражения состоит в том, что значение перемещения  $\Delta_n$  может быть вычислено с использованием только статических факторов.

#### § 14. ДРУГОЙ ВИД ФОРМУЛЫ (89)

В дальнейшем мы будем использовать (89) в несколько видоизмененной форме, для чего воспользуемся

следующим обстоятельством. Будем называть стержнем и отмечать индексом  $c$  все элементы, для которых учитываются только упругие и температурные удлинения оси; аналогично к изгибающим элементам, которые отмечаются индексом  $y$ , отнесем все элементы, для которых учитываются только упругие углы поворота; наконец к вантовым элементам, которые отмечаются индексом  $b$ , отнесем те элементы, для которых учитываются только геометрические удлинения. При этом формула (89) приобретает такой вид:

$$\begin{aligned}\Delta_n = & \sum_c \int \frac{n_{nc} (N_c - N_c^0)}{EF_c} dl_c + \sum_c n_{nc} a_c l_c (T_c - T_c^0) + \\ & + \sum_y \int \frac{m_{ny} (M_y - M_y^0)}{EJ_y} ds_y - \\ & - \frac{1}{2} \sum_b \int h_{bn} \left[ \left( \frac{Q_b}{H_b} \right)^2 - \left( \frac{Q_b^0}{H_b^0} \right)^2 \right] dL_b = \\ & = \bar{\Delta}_n - \frac{1}{2} \sum_b \int h_{nb} \left[ \left( \frac{Q_b}{H_b} \right)^2 - \left( \frac{Q_b^0}{H_b^0} \right)^2 \right]. \quad (90)\end{aligned}$$

Если продольные составляющие нагрузок на вантовых элементах не учитываются, то

$$\Delta_n = \bar{\Delta}_n - \frac{1}{2} \sum_b h_{nb} \left( \frac{D_b}{H_b^2} - \frac{D_b^0}{H_b^{02}} \right). \quad (90a)$$

Следует обратить внимание на следующее обстоятельство, связанное с практическим использованием формулы (90). Если для какого-нибудь элемента конструкции необходимо учесть перемещения различной природы (например, и продольные, и изгибные), то этот элемент должен быть заинумерован несколько раз (один раз в качестве стержня с номером  $c$ , другой раз в качестве участка с номером  $y$ ). Так, например, вантовые элементы, как правило, имеют и шумерацию стержней. Если же какая-нибудь гибкая нить не учтена в качестве элемента с индексом  $c$ , то это будет означать, что нить нерастяжима.

В заключение настоящего параграфа отметим следующее. Нам удалось получить аналог формулы Максвелла — Мора для нелинейно-упругой системы потому, что нелинейность заключалась только в зависимости (16) между деформациями и внутренними усилиями (напряжениями), т. е., несмотря на явно геометрическое происхождение нелинейности, в расчетные формулы она вошла как «физическая» нелинейность. Что же касается возможности вывода формул типа Максвелла — Мора для физически нелинейных систем, то она была обнаружена в работах Н. И. Безухова [1], А. П. Филина [89], Дж. Аргириса [77], А. Р. Ржаницына [66] и др.

## § 15. ПРИМЕР РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ ВАНТОВО-СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Выводом формулы (90) по сути исчерпана задача о расчете статически определимых вантово-стержневых систем. Действительно, вследствие статической определимости системы все внутренние усилия могут быть определены из условий равновесия, а все интересующие нас перемещения выражены через силовые факторы при помощи зависимости (90); таким образом, мы в состоянии ответить на любой вопрос о напряженном и деформированном состоянии статически определимой вантово-стержневой системы.

В качестве примера рассмотрим работу стреловой конструкции, показанной на рис. 35. Для этой системы необходимо определить усилия в элементах, возникающие под действием нагрузок, указанных на рисунке, и определить прогиб левого конца стрелы. Все необходимые геометрические размеры указаны на рис. 35, жесткостные характеристики элементов следующие:

- вантовые элементы  $ab$  и  $bc$  изготовлены из троса диаметром 6,5 мм по ГОСТ 3068—55 ( $EF=16\,800\,T$ );
- стержень  $a0$  изготовлен из двутавра № 30 по ГОСТ 8239—56 ( $EF=978\,000\,T$ ,  $EJ=1482\,Tm^2$ );
- стержень  $b0$  изготовлен из двутавра № 20 по ГОСТ 8239—56 ( $EF=561\,000\,T$ ,  $EJ=386\,m^2$ ).

В первую очередь определим натяжение в элементе  $bc$ , для чего составим уравнение моментов относительно точки  $O$ :

$$2 \cdot 13 + 0,5 \cdot 13 \cdot 6,5 + 0,01 \cdot 8,94 \cdot 7 - 0,01 \cdot 10,76 \cdot 0,2 - H_{bc} \cdot 2,19 = 0.$$

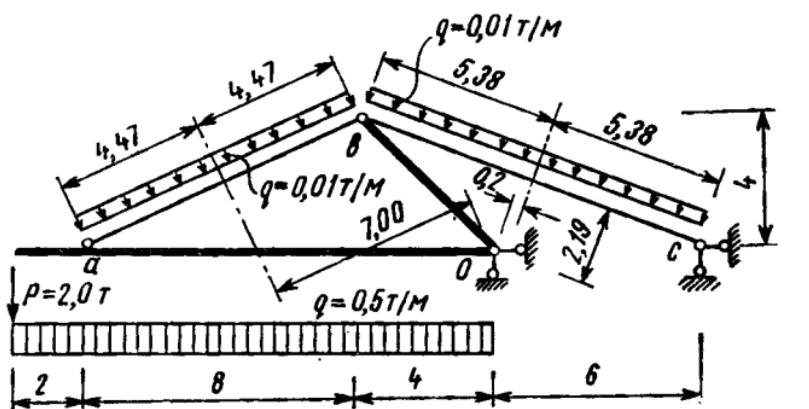
Отсюда

$$N_{bc} = H_{bc} = \frac{68,86}{2,19} = 31,4 \text{ T.}$$

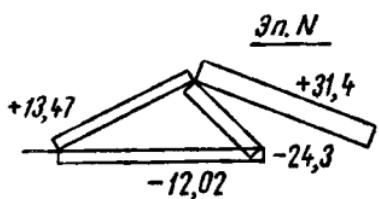
Для элемента  $ab$  аналогично получим:

$$2 \cdot 13 \cdot 0,5 \cdot 13 \cdot 6,5 - H_{ab} \cdot 5,07 = 0;$$

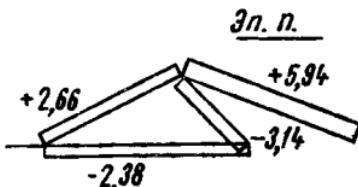
$$N_{ab} = H_{ab} = \frac{68,25}{5,07} = 13,47 \text{ T.}$$



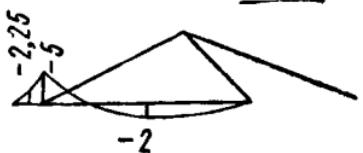
*Состояние Р*



*Состояние I*



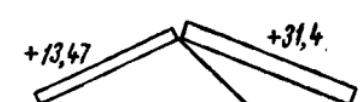
Эп. M



Эп. m.



Эп. H



Эп. h

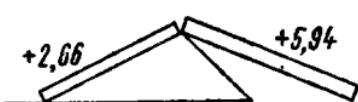


Рис. 35

Все прочие усилия также находятся совершение обычным способом, и их подсчет здесь не приводится. Эпюры усилий показаны на рис. 35 как для грузового, так и для единичного состояния. Здесь лишь отметим, что если при подсчете усилий пренебречь влиянием нагрузок, приложенных непосредственно к вантовым элементам, то, как нетрудно убедиться, результаты практически не изменятся. Сказанное не является общим правилом, однако в большинстве реальных конструкций это утверждение справедливо и при подсчете усилий в элементах нагрузкой на вантах пренебрегают. Ниже мы будем поступать таким же образом без специальныхговорок, надеясь, что внимательный читатель поймет, в каких случаях такое пренебрежение допущено.

Перемещение левого конца стрелы подсчитаем по формуле (90а). При этом интегралы, входящие в (90), будем вычислять по правилу Симпсона. Что касается значений  $D_b$ , входящих в (90), то они подсчитываются по формуле

$$D_b = \frac{q_b^2 L_b^3}{12}$$

и равны:

$$D_{ab} = \frac{0,01^2 \cdot 8,94^3}{12} = 0,0067 \text{ м}; D_{bc} = \frac{0,01^2 \cdot 10,76^3}{12} = 0,0096 \text{ м}.$$

$$D_{ab}^0 = D_{bc}^0 = 0.$$

Искомое перемещение

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{13,47 \cdot 2,66 \cdot 8,94}{16\,800} + \frac{31,40 \cdot 5,94 \cdot 10,76}{16\,800} + \frac{12,02 \cdot 2,38 \cdot 12}{978\,000} + \\ & + \frac{24,30 \cdot 3,14 \cdot 5,65}{561\,000} + \frac{2}{6 \cdot 1482} (5 \cdot 2 + 4 \cdot 2,25 \cdot 1) + \\ & + \frac{12}{6 \cdot 1482} (5 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 1) - \frac{1}{2} \left( \frac{2,66 \cdot 0,0067}{13,47^2} + \right. \\ & \left. + \frac{5,94 \cdot 0,0096}{31,4^2} \right) = 0,0194 + 0,1192 + 0,0003 + 0,0008 + \\ & + 0,0026 + 0,0027 - 0,0007 = 0,1443 \text{ м}. \end{aligned}$$

## § 16. УРАВНЕНИЕ МЕТОДА СИЛ

Рассмотренные выше зависимости и пример расчета относились к статически определимым задачам, которые

являются редкими исключениями, так как неспособность гибкой нити воспринимать сжимающие усилия заставляет конструктора в подавляющем большинстве случаев создавать статически неопределенные вантово-стержневые системы. Расчет таких систем неизмеримо сложнее, главным образом с точки зрения количества вычислений. Тем более заманчивым кажется применение здесь хорошо известных в линейной строительной механике методов, в частности методов сил [60].

Как известно, идея метода сил состоит в том, что в заданной статически неопределенной системе устраняются «лишние» связи, их воздействие на статически определимую основную систему заменяется группой неизвестных усилий, а последние разыскиваются из условия отсутствия дислокаций в введенных разрезах.

Следуя этой идее, устраним лишние связи в статически неопределенной вантово-стержневой системе тогда, когда она находится в исходном состоянии. В этом состоянии система может иметь внутренние усилия, обусловленные предварительным напряжением и каким-либо внешним воздействием. Эти усилия будем обозначать верхним индексом «нуль».

При работе конструкции в состоянии загружения в элементах системы возникают дополнительные внутренние усилия за счет нагрузок, приложенных к системе (сверх нагрузок исходного состояния), и за счет воздействия неизвестных. Окончательные значения усилий при этом могут быть представлены в виде:

$$N_c = N_c^0 + N_c^* + \sum_n n_{cn} x_n; \quad (91)$$

$$M_y = M_y^0 + M_y^* + \sum_n m_{yn} x_n; \quad (92)$$

$$H_b = H_b^0 + H_b^* + \sum_n h_{bn} x_n. \quad (93)$$

Здесь  $x_n$  — неизвестные метода сил. Звездочкой отмечены усилия, возникающие в основной системе от нагрузок, характеризующих переход системы из исходного в рабочее состояние. Линейные соотношения (91) — (93) выполняются для произвольной статически определимой основной системы, поскольку они являются следствиями из условий равновесия. Последние же в силу предположения о малости перемещений яв-

ляются линейными. Следует отметить, что мы предполагаем лишние неизвестные  $x_n$  ( $n=1, 2, \dots, \bar{n}$ ) равными нулю в исходном состоянии системы, но это не эквивалентно предположению об отсутствии самонапряжения в исходном состоянии, поскольку при всех  $x_n=0$  ( $n=1, \dots, \bar{n}$ ),  $N_c^*=0, \dots, H_b^*=0$  усилия в системе могут не обращаться в нуль.

Подставляя (91)–(93) в выражение (90) и требуя, чтобы перемещения по направлению устранимых связей равнялись нулю

$$\Delta_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, \bar{n}), \quad (94)$$

получим систему нелинейных уравнений метода сил:

$$\begin{aligned} & \sum_c \int \frac{n_{nc}}{EF_c} \left( N_c^* + \sum_{n_1} n_{cn_1} x_{n_1} \right) dl_c + \sum_c n_{nc} a_c l_c (T_c^* - T_c^0) + \\ & + \sum_y \int \frac{m_{ny}}{EJ_y} \left( M_y^* + \sum_{n_1} m_{yn_1} x_{n_1} \right) ds_y - \\ & - \sum_b \frac{h_{nb}}{2} \left[ \frac{D_b}{(H_b^0 + H_b^* + \sum_{n_1} h_{bn_1} x_{n_1})^2} - \frac{D_b^0}{H_b^{02}} \right] = 0 \quad (95) \\ & (n, n_1 = 1, 2, \dots, \bar{n}). \end{aligned}$$

Если ввести обычные в строительной механике обозначения линейных составляющих перемещений:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{nn_1} &= \sum_c \int \frac{n_{nc} n_{cn_1}}{EF_c} dl_c + \sum_y \int \frac{m_{ny} m_{yn_1}}{EJ_y} ds_y \quad (96) \\ & (n, n_1 = 1, 2, \dots, \bar{n}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_n &= \sum_c \int \frac{n_{nc} N_c^*}{EF_c} dl_c + \sum_y \int \frac{m_{ny} M_y^*}{EJ_y} ds_y + \\ & + \sum_c n_{nc} a_c l_c (T_c^* - T_c^0) \quad (97) \\ & (n = 1, 2, \dots, \bar{n}), \end{aligned}$$

то (95) можно представить как канонические уравнения метода сил, скорректированные нелинейными добавоч-

ными членами, с помощью которых учитывается работа вантовых элементов:

$$\sum_{n_1} \bar{\delta}_{nn_1} x_{n_1} + \bar{\Delta}_n - \frac{1}{2} \sum_n h_{nb} \left[ \frac{D_b}{(H_b^0 + H_b^* + \sum_n h_{bn} x_n)^2} - \frac{D_b^0}{H_b^{02}} \right] = 0. \quad (98)$$

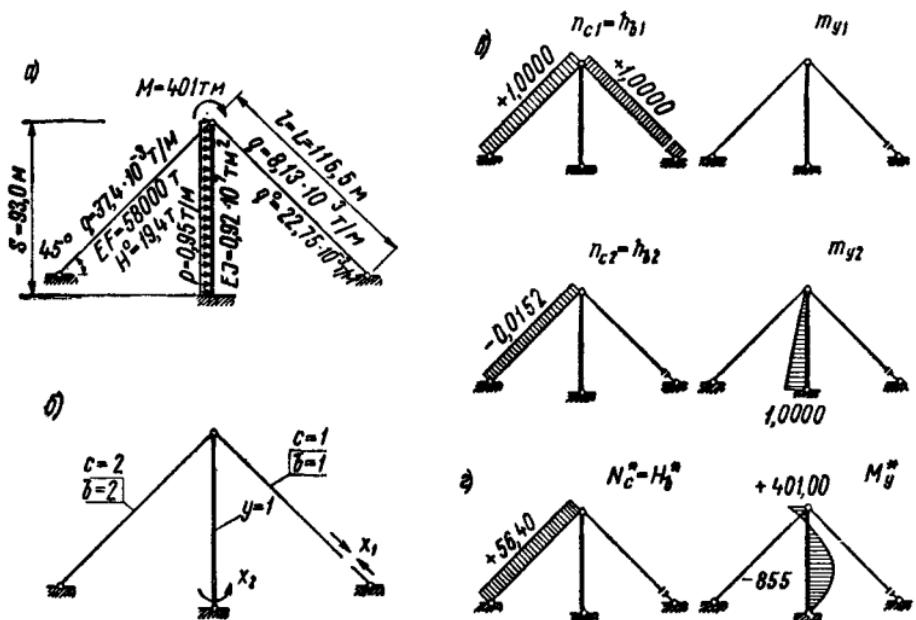


Рис. 36

Полученная система нелинейных алгебраических уравнений не может быть решена точно, методы ее приближенного решения рассматриваются ниже. Здесь же остановимся на двух примерах, из которых будет ясен порядок составления системы нелинейных уравнений методом сил, причем, естественно, примеры выберем несложные.

В качестве первого примера рассмотрим дважды статически неопределенную мачтовую конструкцию (рис. 36). В исходном состоянии ванты загружены равномерно распределенной поперечной нагрузкой  $q^0 = 22,75 \text{ кг/м}$  и предварительно напряжены силой  $H^0 =$

$= 19,40 T$ . В рабочем состоянии на мачту действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $0,950 \text{ т/м}$  и момент в вершине, равный  $401 \text{ Т}\cdot\text{м}$ . Нагрузки на подветренную и наветренную ванты соответственно равны  $37,4 \text{ кг/м}$  и  $8,13 \text{ кг/м}$ , температура не меняется.

Некоторые вспомогательные величины, входящие в уравнения (98), вычислим используя данные, приведенные на рис. 36:

$$\bar{\delta}_{11} = 2 \frac{1 \cdot 1 \cdot 115,5}{58 \cdot 10^3} = 3,980 \cdot 10^{-3};$$

$$\bar{\delta}_{12} = \bar{\delta}_{21} = - \frac{1 \cdot 0,0152 \cdot 115,5}{58 \cdot 10^3} = - 0,030 \cdot 10^{-3};$$

$$\bar{\delta}_{22} = \frac{0,0152 \cdot 0,0152 \cdot 115,5}{58 \cdot 10^3} + \frac{1 \cdot 93}{3 \cdot 0,92 \cdot 10^7} = 0,465 \cdot 10^{-3};$$

$$\bar{\Delta}_1 = \frac{1 \cdot 56,4 \cdot 115,5}{58 \cdot 10^3} = 112,314 \cdot 10^{-3};$$

$$\bar{\Delta}_2 = \frac{0,0152 \cdot 56,4 \cdot 115,5}{58 \cdot 10^3} - \frac{93 \cdot 2 \cdot 855}{6 \cdot 0,92 \cdot 10^7} = - 36,31 \cdot 10^{-3};$$

$$D_1^0 = D_2^0 = \frac{22,75^2 \cdot 10^{-6} \cdot 115,5^3}{12} = 64,6;$$

$$D_1 = \frac{37,40^2 \cdot 10^{-6} \cdot 115,5^3}{12} = 179;$$

$$D_2 = \frac{8,13^2 \cdot 10^{-6} \cdot 115,5^3}{12} = 8,5.$$

Система уравнения метода сил запишется так:

$$\begin{aligned} & 3,980 \cdot 10^{-3} x_1 - 0,030 \cdot 10^{-3} x_2 + 112,314 \cdot 10^{-3} - \\ & - \left\{ \frac{1,0}{2} \left[ \frac{179,0}{(19,400 + x_1)^2} - \frac{64,6}{19,400^2} \right] + \right. \\ & + \frac{1,0}{2} \left[ \frac{8,5}{(19,400 + 56,400 x_1 - 0,0152 x_2)^2} - \frac{64,6}{19,400^2} \right] \Big\} = 0; \\ & - 0,030 \cdot 10^{-3} x_1 + 0,465 \cdot 10^{-3} x_2 - 36,310 \cdot 10^{-3} + \\ & + \frac{0,0152}{2} \left[ \frac{8,5}{(19,400 + 56,400 x_1 - 0,0152 x_2)^2} - \frac{64,6}{19,400^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

После элементарных преобразований получим:

$$3,980 x_1 - 0,030 x_2 + 112,472 = \frac{89500}{(19,400 + x_1)^2} -$$

$$-\frac{4250}{(75,800 + x_1 - 0,0152 x_2)^2} = 0;$$

$$-0,030 x_1 + 0,465 x_2 - 36,520 + \frac{64,6}{(81,650 + x_1 - 0,0152 x_2)^2} = 0,$$

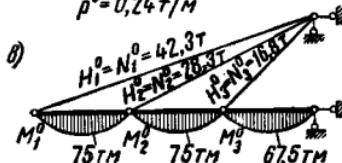
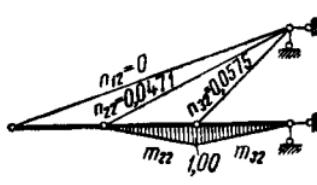
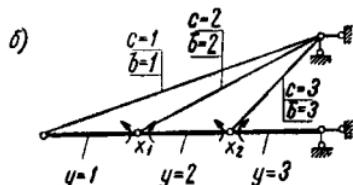
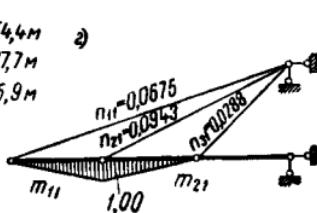
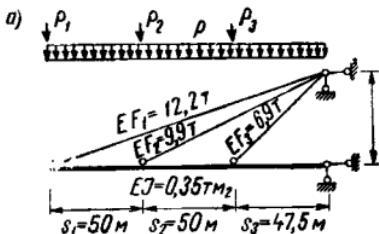


Рис. 37

В качестве второго примера составим систему уравнений метода сил для консольной вантовой фермы, представленной на рис. 37.

В соответствии с исходными данными, приведенными на рис. 37, вычислены величины:

$$\bar{\delta}_{11} = 95,4524; \bar{\delta}_{12} = \bar{\delta}_{21} = 23,8642; \bar{\delta}_{22} = 95,3557;$$

$$\bar{\Delta}_1 = 257,8400; \bar{\Delta}_2 = 229,7000; D_1^0 = D_1 = 14,4000;$$

$$D_2^0 = D_2 = 2,8350; D_3^0 = D_3 = 0,1985.$$

Используя приведенные данные, составим уравнения метода сил:

$$\begin{aligned}
 & 95,4524 x_1 + 23,8642 x_2 + 257,8380 - \frac{0,4860}{(50,8000 + 0,0675 x_1)^2} - \\
 & - \frac{0,1336}{(38,9000 + 0,0943 x_1 + 0,0471 x_2)^2} - \\
 & - \frac{0,0028}{(23,1000 + 0,0288 x_1 + 0,0575 x_2)^2} = 0; \\
 | & 23,8642 x_1 + 95,3557 x_2 + 229,6930 - \\
 & - \frac{0,0665}{(38,9000 + 0,0943 x_1 + 0,0471 x_2)^2} - \\
 & - \frac{0,0057}{(23,1000 + 0,0288 x_1 + 0,0575 x_2)^2} = 0.
 \end{aligned}$$

## § 17. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Полученные выше уравнения метода сил выражают условия замкнутости системы разрезов, введенных в вантово-стержневую систему для образования основной системы. Однако эти же самые уравнения можно трактовать и по-иному, а именно как условия стационарности функции дополнительной работы (потенциала Кастильяно).

Действительно, теорема Кастильяно, обобщенная на случай нелинейной системы, формулируется следующим образом:

*Частная производная дополнительной работы по обобщенной силе равна соответствующему обобщенному перемещению.*

Если в качестве системы обобщенных сил принять усилия  $x_n (n=1, 2, \dots, \bar{n})$  в связях, устраниемых при образовании основной системы, и выразить дополнительную работу как функцию от этих усилий:

$$U^* = U^*(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (99)$$

то на основании теоремы Кастильяно получим:

$$\Delta_n = \frac{\partial U^*(x_1, x_2, \dots, x_{\bar{n}})}{\partial x_n}. \quad (100)$$

Система (100) есть условие стационарности для функции  $U^*$ . В работах [77, 89] показано, что стационар-

ная точка соответствует минимуму функции дополнительной работы.

Что касается выражения для  $U^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то его конкретный вид может быть получен по формуле

$$U^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_0^{(x_1, x_2, \dots, x_n)} \sum_n \Delta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \quad (101)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Криволинейный интеграл (101) дает функцию  $U^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , частные производные которой имеют вид (100). Этот интеграл не зависит от пути интегрирования (иными словами дополнительная работа не зависит от последовательности приложения нагрузок, а зависит только от начального и конечного состояния системы). Этим свойством интеграла (101) можно воспользоваться, чтобы выполнить интегрирование наиболее простым способом.

Будем предполагать, что все  $x_n (n=1, \dots, \bar{n})$  возрастают пропорционально одному параметру  $t$ , сохраняя между собой постоянные соотношения, т. е.

$$x_n = k_n t (n = 1, 2, \dots, \bar{n}), \quad (102)$$

где  $k_n$  — коэффициенты пропорциональности.  
Тогда

$$dx_n = k_n dt, \quad (103)$$

а значение функции дополнительной работы

$$U^* = \int_0^t \left\{ \sum_n \left\{ \sum_{n_1} \bar{\delta}_{nn_1} k_{n_1} t + \bar{\Delta}_n + \sum_b \frac{h_{nb}}{2} \left[ \frac{D_b^0}{(H_b^0)^2} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{D_b}{(H_b^0 + H_b^* + \sum_{n_1} h_{bn_1} k_{n_1} t)^2} \right] \right\} k_n dt = \right. \\ = \int_0^t \sum_n \sum_{n_1} k_n \bar{\delta}_{nn_1} k_{n_1} t dt + \int_0^t \sum_n \bar{\Delta}_n k_n dt - \\ - \int_0^t \sum_n \sum_b \frac{k_n h_{nb}}{2} \left[ \frac{D_b}{(H_b^0 + H_b^* + \sum_{n_1} h_{bn_1} k_{n_1} t)^2} - \frac{D_b^0}{(H_b^0)^2} \right] dt. \quad (104)$$

Выполнив интегрирование и возвращаясь к переменным  $x_n$ , получим окончательно:

$$U^* = \frac{1}{2} \sum_n \sum_{n_1} x_n \bar{\delta}_{nn_1} x_{n_1} + \sum_n \bar{\Delta}_n x_n - \\ - \frac{1}{2} \sum_n \sum_b x_n h_{nb} \left[ \frac{D_b}{(H_b^0 + H_b^* + \sum_n h_{bn} x_n)^2} - \frac{D_b^0}{(H_b^0)^2} \right]. \quad (105)$$

Нетрудно убедиться путем непосредственного дифференцирования, что частные производные выражения (105) по переменным  $x_n$  равны нулю в силу условий (98).

## § 18. О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА СИЛ

Система нелинейных уравнений (98), вообще говоря, имеет много решений, однако действительным состояниям вантово-стержневой системы будут отвечать только те значения неизвестных, при которых имеют силу ограничения на знаки усилий в вантовых элементах:

$$H_b = H_b^0 + H_b^* + \sum_n h_{bn} x_n \geq 0 \quad (106)$$

$$(b = 1, 2, \dots, \bar{b}).$$

В  $\bar{n}$ -мерном пространстве неизвестных  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  каждому набору неизвестных  $x_n (n=1, 2, \dots, \bar{n})$  соответствует точка  $X$ . Множество точек  $X$ , координаты которых удовлетворяют неравенствам (106), образуют некоторую область  $\Omega$ , которую мы будем называть областью допустимых решений, а принадлежность точки  $X$  к этой области  $\Omega$  будем, как это принято, обозначать  $X \in \Omega$ .

Нас будет интересовать вопрос о количестве решений системы уравнений (98), которые относятся к  $\Omega$ . Поскольку система (98) может быть представлена в эквивалентном виде (100), то можно говорить о числе минимумов функции  $U^*$ , находящихся в  $\Omega$ .

**Теорема 6.** *Функция дополнительной работы вантово-стержневых систем (105) строго выпукла в области допустимых решений (106).*

Для доказательства воспользуемся известным фактом [20] — для строго выпуклой функции  $F(x_1, \dots, x_n)$  выражение

$$f(\lambda) = \sum_{t=1}^n \frac{\partial F [(x'_1 + \lambda x''_1), (x'_2 + \lambda x''_2), \dots, (x'_n + \lambda x''_n)]}{\partial x_t} x''_t \quad (107)$$

является монотонно возрастающей функцией  $\lambda$  при произвольном выборе точек  $X' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$  и  $X'' = \{x''_1, x''_2, \dots, x''_n\}$ .

Составим выражение типа (107) для функции  $U^*$ , причем воспользуемся тем обстоятельством, что частные производные имеют вид левых частей уравнений (98):

$$\begin{aligned} f(\lambda) = & \sum_{n_1} \sum_{n_1} (x'_n + \lambda x''_n) \bar{\delta}_{nn_1}(x''_{n_1}) + \sum_n \bar{\Delta}_n x''_n + \\ & + \sum_n \sum_b \frac{\mathbb{E} h_{nb} D_b^0}{2(H_b^0)^2} x''_n - \\ & - \sum_{n_1} \sum_b \frac{x''_n h_{nb} D_b}{2[H_b^0 + H_b^* + \sum_{n_1} h_{bn_1} (x'_{n_1} + \lambda x''_{n_1})]^2}. \end{aligned} \quad (108)$$

Производная от (108) по  $\lambda$

$$\begin{aligned} f'(\lambda) = & \sum_{n_1} \sum_{n_1} x''_n \bar{\delta}_{nn_1} x''_{n_1} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_n \sum_b \frac{(x''_n)^2 h_{nb}^2 D_b}{[H_b^0 + H_b^* + \sum_{n_1} h_{bn_1} (x'_{n_1} + \lambda x''_{n_1})]^3} \end{aligned} \quad (109)$$

положительна при условиях:

$$X' \Subset \Omega; X'' \Subset \Omega; \lambda > 0. \quad (110)$$

Действительно, первый член выражения (109) положителен вследствие того, что матрица  $\|\bar{\delta}_{nn_1}\|$  положительно определена, что касается второго члена, то числитель каждого из слагаемых положителен всегда, а знаменатель — в том случае, если выполняются условия (110).

Положительность производной (109) свидетельствует о том, что  $f(\lambda)$  есть функция, монотонно возрастающая, что и доказывает теорему.

**Теорема 7.** Если решение системы нелинейных уравнений метода сил (98), удовлетворяющее ограничениям на знаки натяжений (106), существует, то оно единственно.

Действительно, вместо решения системы уравнений (98) можно решать следующую задачу математического программирования — найти неизвестные  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , которые минимизируют функцию

$$U^* = \frac{1}{2} \sum_{n_1} \sum_n x_n \bar{\delta}_{nn_1} x_{n_1} + \sum_n \bar{\Delta}_n x_n - \frac{1}{2} \sum_n \sum_b x_n h_{nb} \times \\ \times \left[ \frac{D_b}{(H_b^0 + H_b^*) (H_b^0 + H_b^* + \sum_{n_1} h_{bn_1} x_{n_1})} - \frac{D_b^0}{(H_b^0)^2} \right], \quad (111)$$

при ограничениях

$$H_b^0 + H_b^* + \sum_n h_{bn} x_n \geq 0 \quad (b = 1, 2, \dots, \bar{b}). \quad (112)$$

Поскольку  $U^*$  — выпуклая в  $\Omega$  функция, а ограничения образуют выпуклое множество, то на основании известного утверждения [20] о том, что выпуклая функция достигает минимума только в одной точке выпуклого множества (если последнее не пусто), можно утверждать, что теорема доказана.

## § 19. СЛУЧАЙ ИСЧЕЗАЮЩЕ МАЛЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ НАГРУЗОК НА ВАНТОВЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

Во многих случаях можно получить удовлетворительное приближенное решение задачи о расчете вантово-стержневой системы, если пренебречь влиянием непосредственно приложенных к вантовым элементам нагрузок. К этому случаю мы придем, если устремим к нулю запасения

$$D_b = \int_0^L Q_b^2 dL_b,$$

входящие в уравнения состояний гибких нитей. Как уже отмечалось в § 6, в этом случае график зависимости «натяжение — удлинение» вырождается в две полупрямые:

$$H = \begin{cases} \Delta \frac{EF}{L}, & \text{при } \Delta \geq 0; \\ 0, & \text{при } \Delta < 0, \end{cases}$$

которые характеризуют работу вантового элемента как односторонней (неудерживающей) связи.

Задача математического программирования (111) и (112) при этом вырождается в задачу квадратичного программирования — найти неизвестные  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , которые минимизируют квадратичную функцию

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \sum_{n_1} \sum_{n_2} x_n \bar{\delta}_{nn_1} x_{n_1} + \sum_n \bar{\Delta}_n x_n, \quad (113)$$

при ограничениях

$$H_b^0 + H_b^* + \sum_n h_{bn} x_n \geqslant \quad (b = 1, 2, \dots, \bar{b}). \quad (114)$$

Следует отметить, что переход от задачи (111) и (112) к задаче квадратичного программирования (113) и (114) выполнен не вполне корректно. Действительно, соотношения (111) и (112) являются следствиями из условий стационарности функции дополнительной работы и, следовательно, требуют, чтобы в точке, где достигается минимум функции  $U^*$ , выполнялись условия стационарности:

$$\frac{\partial U^*}{\partial x_n} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, \bar{n}). \quad (115)$$

В задаче (111) и (112) эти условия выполняются всегда, поскольку минимум  $U^*$  достигается внутри области  $\Omega$ . Справедливость этого утверждения следует уже из того факта, что на границах области  $\Omega$  обращается в нуль по крайней мере одна из величин:

$$H_{b_i} = H_{b_i}^0 + H_{b_i}^* + \sum_n h_{b_i n} x_n, \quad (116)$$

что немедленно приводит к бесконечно большому значению целевой функции (111).

Что же касается задачи (113) и (114), то здесь реализация решения на границе области допустимых решений вполне осуществима и, следовательно, выполняя предельный переход к  $D_b=0$ , необходимо было бы ис-

следовать и тот случай, когда одновременно обращается в нуль выражение (116), входящее в знаменатель (111).

Тем не менее можно показать, что сведение проблемы расчета системы с односторонними связями к задаче квадратичного программирования вполне правильно. Поскольку проблема расчета систем с односторонними связями [59, 61] сама по себе представляет значительный интерес, этому вопросу посвящен следующий параграф.

## § 20. РАСЧЕТ УПРУГИХ СИСТЕМ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ КАК ЗАДАЧА КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ<sup>1</sup>

В этом параграфе будем рассматривать системы с односторонними связями произвольного вида, не обязательно трактуя односторонние связи как вантовые элементы. Будем использовать обычные предпосылки строительной механики (малость перемещений, идеальная упругость и т. д.), предполагая при этом, что расчет можно выполнять по недеформированной схеме.

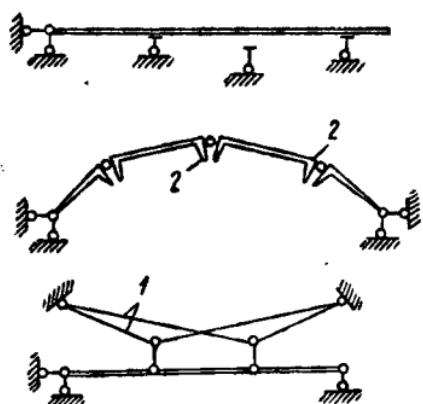


Рис. 38

нных связей двусторонними становятся неизменяемыми<sup>2</sup>. Примеры таких систем показаны на рис. 38.

Условимся о следующем правиле знаков для усилий и перемещений в односторонних связях:

а) усилие  $u$  в односторонней связи будем считать положительным, если оно может быть воспринято этой связью;

б) перемещение  $z$  по направлению односторонней связи будем считать положительным, если оно не ограничивается этой связью.

<sup>1</sup> Данный параграф написан совместно с В. Н. Гордеевым.

<sup>2</sup> Сравни с определением квазипеременяемости (§ 1).

При этом правила знаков действительные перемещения и усилия в односторонних связях могут быть только неотрицательными.

Рассмотрим наряду с заданной системой  $S$  систему  $S_c$ , которую можно получить из  $S$  следующим образом:

а) все односторонние связи заменяются двусторонними;

б) в полученной в общем случае статически неопределенной системе устраняются лишние связи так, чтобы перемещения по направлениям заменяющих связей не вызывали бы в них никаких усилий; это всегда можно сделать выбирая, например, статически определимую основную систему.

Некоторые примеры построения системы  $S_c$  приведены на рис. 39.

Сформулируем следующую задачу квадратичного программирования.

Минимизировать

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{j_1=1}^n x_j \delta_{jj_1} x_{j_1} + \sum_{j=1}^n \delta_j^p x_j \quad (117)$$

при ограничениях

$$u_k = \sum_{j=1}^n n_{kj} x_j - n_k^p; \quad u_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s). \quad (118)$$

Здесь обозначено:

$x_j$  — усилия в устранных связях системы  $S_c$ ;  
 $\delta_{jj_1}$  — перемещения по направлению устранившей  $j$ -й связи от воздействия  $x_{j_1} = 1$ ;

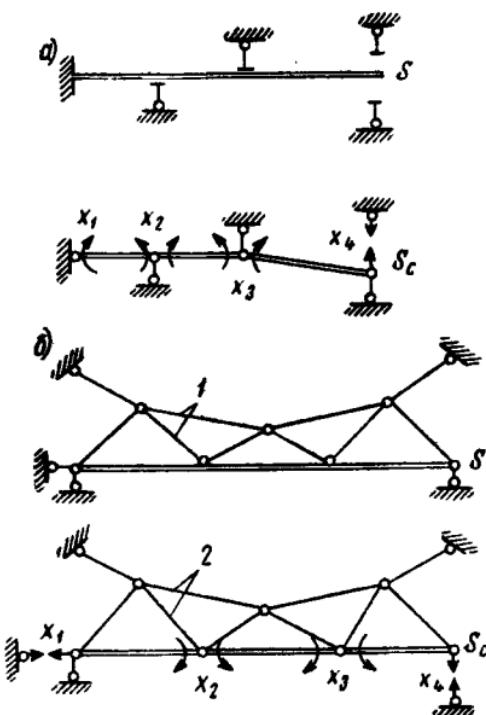


Рис. 39

$\delta_j^p$  — перемещения по направлению  $j$ -й связи в системе, нагруженной внешней нагрузкой, когда все  $x_j = 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ), а система находится в состоянии, соответствующем замкнутым односторонним связям;

$n_{kj}$  — усилия в заменяющих связях от воздействия  $x_j = 1$  в системе  $S_c$ ;

$n_k^p$  — то же, в системе  $S_c$ , нагруженной внешней нагрузкой, при всех  $x_j = 0$ .

Необходимо помнить, что правило знаков для усилий и перемещений заменяющих связей должно совпадать с правилом знаков для соответствующих односторонних связей.

Как известно из теории квадратичного программирования [20, 34], задача (117), (118) эквивалентна следующая задача Лагранжа — определить неизвестные  $x_j$ ,  $z_k$  и  $u_k$ , удовлетворяющие системе ограничений:

$$\sum_{j_1=1}^n \delta_{jj_1} x_{j_1} - \sum_{k=1}^s n_{kj} z_k + \delta_j^p = 0; \quad (119)$$

$$u_k = \sum_{j=1}^n n_{kj} x_j + n_k^p; \quad (120)$$

$$u_k \geq 0; \quad z_k \geq 0; \quad (121)$$

$$u_k z_k = 0 \quad (122)$$

$$(j, j_1 = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, s).$$

Покажем, что эти условия всегда выполняются в действительном равновесном состоянии системы  $S$ , если истолковать  $z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, s$ ) как перемещения по направлению односторонних связей, а  $u_k$  ( $k = 1, 2, \dots, s$ ) — как усилия в них.

Пусть в равновесном состоянии в системе  $S$  возникают усилия  $x_j$ , соответствующие устранимым связям, а перемещения по направлению односторонних связей равны  $z_k$ . Приложим к системе  $S_c$  усилия  $x_j$  и сместим заменяющие связи на величину  $z_k$ . Если обозначить  $\delta_{jk}^0$  — перемещение по направлению  $j$ -й устранимой лишней связи от единичного перемещения  $k$ -й заменяю-

щей связи, то можно значения перемещений в системе  $S_c$  представить в виде:

$$d_j = \sum_{j_1=1}^n \delta_{jj_1} x_{j_1} + \sum_{k=1}^s \delta_{jk}^0 z_k + \delta_j^p, \quad (123)$$

а усилия в заменяющих связях так:

$$R_k = \sum_{j=1}^n n_{kj} x_j + n_k^p. \quad (124)$$

Усилия  $R_k$  не зависят от перемещений  $z_k$ , в соответствии с правилом «б» образования системы  $S_c$ , что и отмечено в формуле (124).

На основании теоремы о взаимности реакций и перемещений [60] (а эта теорема для системы  $S_c$  справедлива)

$$\delta_{jk}^0 = -n_{kj} \quad (125)$$

и, следовательно,

$$d_j = \sum_{j_1=1}^n \delta_{jj_1} x_{j_1} - \sum_{k=1}^s n_{jk} z_k + \delta_j^p. \quad (123a)$$

Потребовав, чтобы в системе  $S_c$  отсутствовали перемещения  $d_j$ , а усилия в заменяющих связях равнялись усилиям в соответствующих односторонних связях системы  $S$ , мы придем к уравнениям (119) и (120), которые являются условиями эквивалентности  $S$  и  $S_c$ . Условия (121) являются ограничениями, налагаемыми односторонними связями, и при принятом выше правиле знаков, естественно, выполняются в действительном состоянии системы  $S$ . Что же касается условия (122), то оно выполняется в силу того, что в односторонних связях при усилии, не равном нулю, отсутствуют перемещения (связь замкнута), а при перемещении, не равном нулю, отсутствуют усилия (связь разомкнута).

Таким образом, условия задачи Лагранжа (119)–(122) выполняются, если переменные  $x_j$ ,  $z_k$  и  $u_k$  соответствуют действительному состоянию заданной системы, а это, в силу эквивалентности задач (119)–(122) и (117) и (118), подтверждает справедливость экстремального принципа (117) при ограничениях (118).

Образуем другую вспомогательную систему  $S_n$  (рис. 40), для чего:

а) устраним все односторонние связи — а их воздействие на систему заменим усилиями  $u_h$ , правило знаков для которых совпадает с правилом знаков для усилий в односторонних связях;

б) в полученной в общем случае геометрически изменяемой системе введем дополнительные связи так, чтобы усилия не вызывали перемещений по направлению односторонних связей.

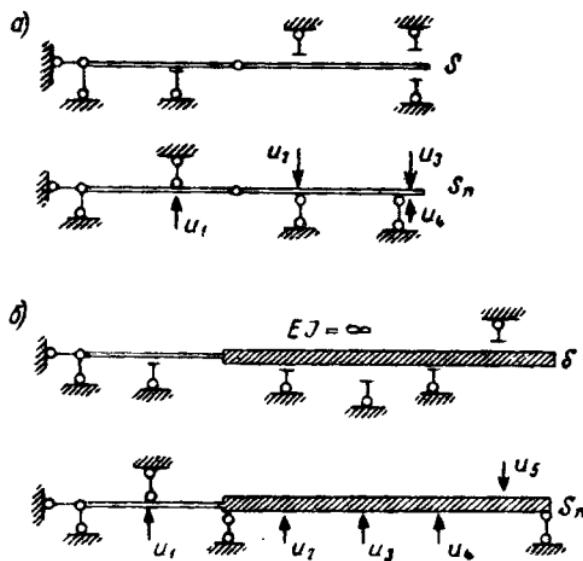


Рис. 40

Последнему предположению можно всегда удовлетворить, если, например, установить дополнительные связи там же, где были расположены односторонние связи. Естественно, что, кроме этого, можно установить и ряд других дополнительных связей (или установить меньшее число связей, если система имеет бесконечно жесткие участки).

С системой  $S_n$  можно связать следующую задачу квадратичного программирования.

Минимизировать

$$u = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{l_i=1}^m \Delta_l r_{u_i} \Delta_{l_i} + \sum_{i=1}^m r_i^p \Delta_i \quad (126)$$

при ограничениях

$$z_k = \sum_{i=1}^m c_{ki} \Delta_i + c_k^p; z_k \geq 0 \quad (127)$$

$$(k = 1, 2, \dots, s),$$

где введены обозначения:

$\Delta_i$  — перемещение  $i$ -й связи в системе  $S_n$ ;

$r_{ii_1}$  — усилие в дополнительной  $i$ -й связи от смещения  $\Delta_{i_1} = 1$ ;

$r_i^p$  — то же, от воздействия внешней нагрузки — в состоянии, когда все  $\Delta_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) и  $u_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, s$ );

$c_{ki}$  — перемещение по направлению  $k$ -й односторонней связи от воздействия  $\Delta_i = 1$  в системе  $S_n$ ;

$c_k^p$  — то же, от воздействия внешней нагрузки при несмешенных дополнительных связях.

Задача Лагранжа, эквивалентная задаче (126) и (127), формулируется так — определить неизвестные  $\Delta_i$ ,  $z_k$  и  $u_k$ , удовлетворяющие системе ограничений:

$$\sum_{i_1=1}^m r_{ii_1} \Delta_{i_1} - \sum_{k=1}^s c_{ik} u_k + r_i^p = 0; \quad (128)$$

$$z_k = \sum_{i=1}^m c_{ki} \Delta_i + c_k^p; \quad (129)$$

$$u_k \geq 0; z_k \geq 0; \quad (130)$$

$$u_k z_k = 0 \quad (131)$$

$$(i, i_1 = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, s).$$

Эти условия, как и условия (119) — (122), всегда выполняются в действительном равновесном состоянии системы  $S$ , если  $z_k$  и  $u_k$  являются соответственно перемещениями и усилиями в односторонних связях.

Действительно, если приложить к  $S_n$  усилия  $u_k$  и дать дополнительным связям перемещения  $\Delta_i$ , соответствующие действительным перемещениям в системе  $S$ , то реакции в дополнительных связях будут равны:

$$r_i = \sum_{i_1=1}^m r_{ii_1} \Delta_{i_1} + \sum_{k=1}^s r_{ik}^0 u_k + r_i^p, \quad (132)$$

где  $r_{ik}^0$  — реакция  $i$ -й дополнительной связи от единичного усилия в  $k$ -й односторонней связи.

Если учесть, что

$$r_{ik}^0 = -c_{ki}, \quad (133)$$

то реакции можно представить в виде:

$$\rho_i = \sum_{i_1=1}^m r_{ii_1} \Delta_{i_1} - \sum_{k=1}^s c_{ik} u_k + r_i^p. \quad (132a)$$

За счет смещений  $\Delta_i$  и воздействия внешних нагрузок в системе  $S_{\Pi}$  возникнут также перемещения по направлению односторонних связей

$$d_k = \sum_{i=1}^m c_{ki} \Delta_i + c_k^p, \quad (134)$$

не зависящие от усилий  $u_k$ , в силу договоренности о способе образования системы  $S_{\Pi}$ .

Потребовав, чтобы  $\rho_i = 0$  и  $d_k = z_k$ , мы придем к уравнениям (128) и (129), которые являются условиями эквивалентности систем  $S$  и  $S_{\Pi}$ . Далее можно повторить рассуждения, приведенные выше, и убедиться в справедливости экстремального принципа (126) при ограничениях (127).

Известно, что задача квадратичного программирования имеет единственное решение в том случае, если квадратичная форма, входящая в выражение минимизируемой функции, является положительно определенной.

Квадратичная форма в случае решения задачи (117) и (118) полностью определяется вспомогательной системой, получаемой из заданной системы с односторонними связями  $S$  путем замены всех односторонних связей двусторонними. Коэффициенты квадратичной формы  $\delta_{jj}$  являются также коэффициентами системы уравнений метода сил для вспомогательной системы. Если матрица перемещений  $\|\delta_{jj}\|$  является положительно определенной, то заданная система с односторонними связями имеет единственное решение относительно неизвестных усилий  $x_j$ . Поскольку усилия в односторонних связях выражаются через  $x_j$  при помощи зависимостей (118), то и эти усилия определяются единственным образом. Что каса-

ется перемещений  $z_k$  по направлению односторонних связей, то нельзя утверждать, что все они будут единственными, хотя часть этих перемещений однозначно определяется условиями (122). Положительная определенность  $\|\delta_{jj_i}\|$  является также и условием единственности решения задачи расчета вспомогательной системы, откуда следует теорема.

**Теорема 8.** Достаточное условие единственности решения относительно усилий в системе с односторонними

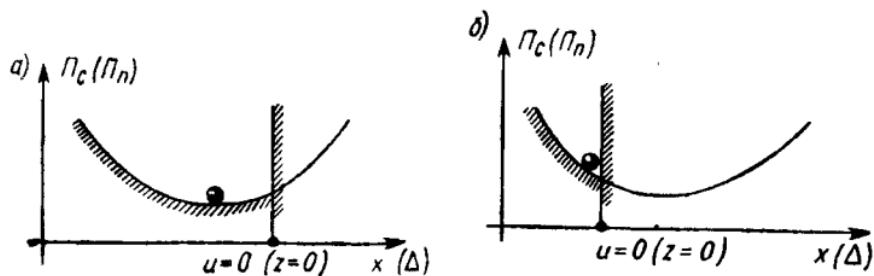


Рис. 41

связями сводится к требованию положительной определенности матрицы перемещений  $\|\delta_{jj_i}\|$  для системы  $S_c$  и совпадает с условием единственности решения для вспомогательной системы, в которой односторонние связи заменены двусторонними.

Теореме 8 аналогична теорема 9.

**Теорема 9.** Достаточное условие единственности решения относительно перемещений в системе с односторонними связями сводится к требованию положительной определенности матрицы реакций  $\|r_{ii_i}\|$  для системы  $S_p$  и совпадает с условием единственности решения для вспомогательной системы с отброшенными односторонними связями.

Следует отметить, что последнее условие выполняется лишь в случае систем с односторонними лишними связями. Что касается единственности усилий, то условие единственности выполняется в подавляющем большинстве случаев.

Доказанные выше два экстремальных принципа сводят задачу с расчета системы с односторонними связями к задачам квадратичного программирования (117) и (118) или (126) и (127). Естественно поэтому рассмотр-

реть вопрос о том, какой геометрический смысл имеют известные особенности решений этих задач.

Для этого введем в рассмотрение  $(n+1)$ -мерное [ $(m+1)$ -мерное] пространство переменных  $x_j$ ,  $\bar{U}(\Delta_i, \bar{U})$ . В этом пространстве квадратичная функция  $\bar{U}(\bar{U})$  определяет некоторую поверхность, а условия (118) [условия (127)] — некоторую выпуклую область  $\Omega$  допустимых значений неизвестных усилий  $x_j$  (перемещений  $\Delta_i$ ). Минимум  $\bar{U}(\bar{U})$  может достигаться на границе области  $\Omega$ , при этом точка решения не является стационарной. На рис. 41 дана наглядная иллюстрация этого факта на широко используемом примере тяжелого шарика, помещенного на потенциальную поверхность.

Нетрудно заметить, что в этом случае принцип возможных перемещений должен иметь форму неравенства, хорошо известного в аналитической механике систем с односторонними связями [36].

## Глава 5. ОСНОВЫ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И СМЕШАННОГО МЕТОДА

### § 21. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Основная идея метода перемещений [60] состоит в том, что, имея набор заранее изученных стандартных элементов, для которых по концевым перемещениям можно определить их напряженное состояние, мы путем наложения дополнительных связей на заданную систему представляем последнюю как совокупность стандартных элементов, не передающих усилия друг на друга; затем разыскиваем неизвестные перемещения концов элементов из условия отсутствия усилий в наложенных связях.

Основные уравнения метода перемещений являются уравнениями равновесия и, следовательно, линейны относительно входящих в них усилий, если расчет ведется по недеформированной схеме. Источником нелинейности в этих уравнениях могут служить лишь зависимости между величинами перемещений и реакциями элементов.

В символической форме уравнения метода перемещений могут быть записаны так:

$$\sum_{i=1}^m a_{ji} \cdot r_i (w_1, w_2, \dots, w_k, \dots, w_n) = 0 \quad (135)$$
$$(j, k = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь  $w_k$  — неизвестное перемещение  $k$ -й наложенной связи;

$r_i$  — реакция  $i$ -го элемента на перемещение наложенных связей, в общем случае зависящая от этих перемещений нелинейно;

$$a_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{если } i\text{-й элемент создает усилие} \\ & \text{в } j\text{-й наложенной связи;} \\ 0 & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

В случае вантово-стержневой системы произвольного вида будем считать изученными элементами, из которых набирается основная система метода перемещений, стержень с защемленными концами и гибкую нить с неподвижными опорами.

Таким образом, для образования основной системы метода перемещений необходимо полностью закрепить все узлы системы от всех перемещений, как угловых, так и линейных. В общем случае пространственной системы будем предполагать, что для каждого свободного узла составляется шесть уравнений, в соответствии с шестью неизвестными, относящимися к этому узлу (три линейных смещения и три угла поворота), и, как обычно принято в строительной механике, будем трактовать эти уравнения как условия отсутствия реактивных усилий в шести связях, наложенных на каждый узел заданной системы, в основной системе метода перемещений.

Будем использовать в уравнениях следующие индексы:

$p$  — номер наложенной связи, препятствующей линейному смещению в основной системе метода перемещений (номер неизвестного линейного перемещения);

$\varphi$  — номер наложенной связи, препятствующей угловому перемещению в основной системе (номер неизвестного углового перемещения).

Для описанной выше основной системы из геометрических и статических соображений могут быть заданы:

$\omega_{\varphi\varphi_1}$  — элементы матрицы линейного преобразования вектора углов поворота в вектор моментных реакций, в наложенных связях защемления, от поворотов в основной системе, т. е. реакции в связях с номером  $\varphi$  от единичных поворотов связей с номером  $\varphi_1$ ;

$r_{\varphi p}$  — элементы матрицы линейного преобразования вектора смещений в вектор моментных реакций, т. е. реакции в наложенных связях с номерами  $\varphi$  от единичных смещений связей с номерами  $p$ ;

$r_{pp_1}$  — элементы матрицы линейного преобразования вектора смещений в вектор реакций, возникающих в линейных связях, т. е. реакции в связях

с номерами  $p$  от единичных смещений связей с номерами  $p_1$ ;

$C_{pb}$  — элементы матрицы, проектирующей усилия в вантовых элементах на направления перемещений наложенных связей, т. е. реакции линейных связей с номерами  $p$  от единичных значений напряжений в вантовых элементах с номерами  $b$ .

С учетом введенных обозначений уравнения метода перемещений можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\varphi_1} \omega_{\varphi\varphi_1} \Phi_{\varphi_1} + \sum_p \rho_{\varphi p} w_p &+ \Omega_\varphi = 0; \\ \sum_{\varphi_1} \rho_{p\varphi_1} \Phi_{\varphi_1} + \sum_p r_{p_1 p} w_p + \sum_b C_{pb} H_b + R_p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

$$(\varphi = 1, 2, \dots, \bar{\varphi}; p = 1, 2, \dots, \bar{p}).$$

Здесь  $\Phi_\varphi$  — неизвестные углы поворотов;

$w_p$  — неизвестные линейные перемещения;

$\Omega_\varphi$ ;  $R_p$  — реакции в наложенных связях (соответственно реактивные моменты и силы) от воздействия внешних нагрузок.

Присоединяя к уравнениям (136) уравнения состояний гибких нитей (20), а также учитывая то обстоятельство, что линейные перемещения  $w_p$  связаны с изменением длины хорды  $\Delta_b$  вантовых элементов соотношением

$$\Delta_b = \sum_p C_{bp} w_p, \quad (137)$$

окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\varphi_1} \omega_{\varphi\varphi_1} \Phi_{\varphi_1} + \sum_{p_1} \rho_{\varphi p_1} w_{p_1} &+ \Omega_\varphi = 0; \\ \sum_{\varphi_1} \rho_{p\varphi_1} \Phi_{\varphi_1} + \sum_{p_1} r_{p_1 p} w_{p_1} + \sum_b C_{pb} H_b + R_p &= 0; \\ - \sum_{p_1} C_{bp_1} w_{p_1} + \frac{H_b L_b}{E F_b} - \frac{D_b}{2 H_b^2} - \Delta_b^0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

$$(\varphi = 1, 2, \dots, \bar{\varphi}; p = 1, 2, \dots, \bar{p}; b = 1, 2, \dots, \bar{b}).$$

Система уравнений метода перемещений (138) может содержать больше неизвестных, чем система метода сил.

Однако, как нетрудно заметить, структура этих уравнений более благоприятна, в частности нелинейные члены системы входят в каждое из уравнений только по одному разу, что позволяет при известных  $\omega_p$  решать отдельные кубические уравнения для определения напряжений.

Кроме того, порядок системы можно значительно снизить, если обратить внимание на то обстоятельство, что неизвестные  $\varphi_\varphi$  входят только в линейные уравнения системы (138). Это дает возможность представить  $\varphi_\varphi$  в таком виде:

$$\varphi_\varphi = \sum_p \sum_{\varphi_1} b_{\varphi\varphi_1} \rho_{\varphi_1 p} w_p - \sum_{\varphi_1} b_{\varphi\varphi_1} \Omega_{\varphi_1}, \quad (139)$$

где  $b_{\varphi\varphi_1}$  — элементы матрицы, обратной к  $\|\omega_{\varphi\varphi_1}\|$ , т. е.

$$\|b_{\varphi\varphi_1}\| = \|\omega_{\varphi\varphi_1}\|^{-1}. \quad (140)$$

Подстановка (139) во вторую группу системы уравнений (138) дает:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{p_1} \left( r_{pp_1} - \sum_{\varphi} \sum_{\varphi_1} \rho_{\varphi_1 p} \rho_{p_1 \varphi} b_{\varphi\varphi_1} \right) w_{p_1} + \\ & + \sum_b C_{pb} H_b + R_p - \sum_{\varphi} \sum_{\varphi_1} \Omega_\varphi b_{\varphi\varphi_1} \rho_{\varphi_1 p} = 0; \\ & - \sum_p C_{bp} w_p + \frac{H_b L_b}{E F_b} - \frac{D_b}{2 H_b^2} + \Delta_b^0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

Уравнения (141) можно, вообще говоря, получить и сразу, не обращая матрицу  $\|\omega_{\varphi\varphi_1}\|$ , для чего необходимо воспользоваться сложной основной системой метода перемещений [39], выбирая в качестве неизвестных только линейные перемещения.

В качестве примера для составления уравнений метода перемещений рассмотрим еще раз мачтовую конструкцию, показанную на рис. 36. Основная система образована путем наложения дополнительной связи, препятствующей смещению вершины мачты.

В уравнения метода перемещений для тех же исходных данных, которые были приняты при составлении уравнений метода сил, войдут следующие величины:

$$r_{11} = \frac{3 \cdot 0,92 \cdot 10^7}{93,0^3} = 34,4;$$

$$R_1 = \frac{3}{8} ql - \frac{3M}{2l} = \frac{3}{8} 0,95 \cdot 93 - \frac{3}{2} \cdot \frac{401}{93} = 39,630;$$

$$\frac{L_1}{EF_1} = \frac{L_2}{EF_2} = \frac{115,5}{58\,000} = 0,002;$$

$$D_1 = \frac{q_1^2 L_1^3}{12} = \frac{8,13^2 \cdot 10^{-6} \cdot 115,5^3}{12} = 8,48;$$

$$D_2 = \frac{q_2^2 L_2^3}{12} = \frac{37,4^2 \cdot 10^{-6} \cdot 115,5^3}{12} = 179,8;$$

$$\Delta^0 = 0,142.$$

Уравнения метода перемещений будут иметь такой вид:

$$34,400 w - 0,707 H_1 + 0,707 H_2 + 39,630 = 0;$$

$$0,707 w - 0,002 H_1 + \frac{8,480}{2H_1^2} - 0,142 = 0;$$

$$- 0,707 w + 0,002 H_2 + \frac{179,800}{2H_2^2} - 0,142 = 0.$$

}

К этим уравнениям, вообще говоря, следует присоединить неравенства

$$H_1 \geqslant 0 \text{ и } H_2 \geqslant 0,$$

поскольку нас интересуют только реализующиеся в действительности положительные значения натяжений.

В заключение еще раз подчеркнем, что основная система метода перемещений должна быть выбрана таким образом, чтобы вантовые элементы имели неподвижные опоры. Нетрудно заметить, что это требование эквивалентно правилу «б» образования вспомогательной системы  $S_n$  из системы  $S$  с односторонними связями (см. § 20).

## § 22. УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО МЕТОДА

В строительной механике стержневых систем многие задачи удобно решать смешанным методом [60]. Основная система этого метода образуется удалением некоторого количества связей в той части системы, где расчет удобно выполнять по методу сил, и наложением дополнительных связей, определяющих положение узлов, в которых эти связи удалены.

тельных связей в другой части системы, где удобно использовать метод перемещений. Эта же идея может быть применена к вантово-стержневым системам при следующем условии — в основной системе смешанного метода любой из вантовых элементов должен либо иметь неподвижные концы, либо усилие в нем от внешней нагрузки и неизвестных метода сил должно опре-

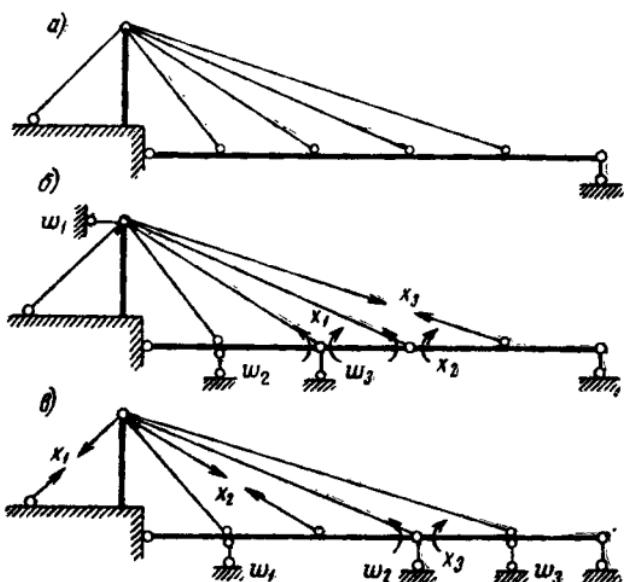


Рис. 42

деляться из одних только уравнений равновесия. Это условие существенным образом сужает класс допустимых основных систем смешанного метода, однако не уничтожает его полностью. На рис. 42, б приведен пример основных систем смешанного метода для конструкции по рис. 42, а, построенной верно, а на рис. 42, в — с нарушением сформулированного выше условия.

Будем отмечать индексом  $b1$  те вантовые элементы, в которых усилия могут быть определены на основании уравнений равновесия, а индексом  $b2$  те, что имеют несмещаемые концы. Уравнения смешанного метода будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned}
 & \sum_{n_1} \delta_{nn_1} x_{n_1} + \sum_{p_1} \delta'_{np_1} w_{p_1} + \Delta_n - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{b1} h_{n,b1} \left[ \frac{D_{b1}}{\left( H_{b1}^0 + H_{b1}^* + \sum_n h_{b1,n} x_n \right)^2} = \frac{D_{b1}^0}{\left( H_{b1}^0 \right)^2} \right] = 0; \\
 & \sum_{n_1} r'_{pn_1} x_{n_1} + \sum_{p_1} r'_{pp_1} w_{p_1} + R_p + \sum_{b2} C_{p,b2} H_{b2} = 0; \\
 & - \sum_{p_1} C_{b1,p1} w_{p1} + \frac{H_{b2} L_{b2}}{E F_{b2}} - \frac{D_{b2}}{2 H_{b2}^2} - \Delta_{b2}^0 = 0; \\
 & (n = 1, 2, \dots, \bar{n}; p = 1, 2, \dots, \bar{p}; b1 = 1, 2, \dots, \bar{b1}; \\
 & b2 = 1, 2, \dots, \bar{b2}; \bar{b1} + \bar{b2} = \bar{b}).
 \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

Здесь обозначено:

$\delta'_{np}$  — перемещения по направлению неизвестных метода сил от единичных смещений наложенных связей метода перемещений;

$r'_{pn}$  — реакции наложенных связей метода перемещений от воздействия единичных значений неизвестных метода сил.

Величины  $\delta'_{np}$  и  $r'_{pn}$  могут быть вычислены так, как это делается в строительной механике стержневых систем, поскольку в соответствии со сформулированным выше условием образования основной системы усилия и перемещения вантовых элементов не влияют на величины  $\delta'_{np}$  и  $r'_{pn}$ . Следует отметить, что эти величины связаны между собой известными соотношениями взаимности:

$$\delta'_{np} = -r'_{pn}. \quad (143)$$

В качестве примера рассмотрим схему, изображенную на рис. 43. Будем считать, что жесткость всех вантовых элементов на растяжение-сжатие равна  $EJ = 5000 \text{ T}$ , поперечная нагрузка на них — равномерно распределенная с одинаковой для всех вант интенсивностью  $q = 0,1 \text{ T/m}$ , изгибная жесткость также одинакова для всех участков  $EJ = 40\,000 \text{ T} \cdot \text{m}^2$  (нумерация вант и участков показана на рис. 43, а). Податливость упругой опоры равна  $0,05 \text{ м/т}$ .

В соответствии с описанным выше правилом выберем основную систему смешанного метода (см. рис. 43, а). Ванты 1 и 5 принадлежат множеству  $b1$ , так как усилия в них могут быть определены только из условий равновесия. Ванты 2, 3, 5 принадлежат множеству  $b2$ , так как связи, наложенные на основную систему смешанного метода, лишают их концы подвижности.

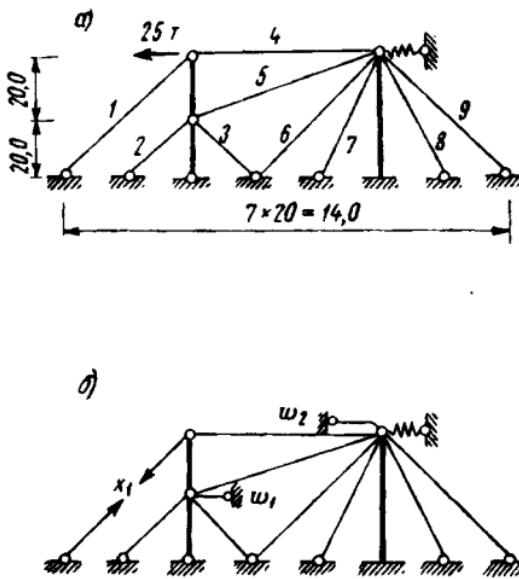


Рис. 43

Вычислим усилия в элементах основной системы от воздействия нагрузок и неизвестного метода сил:

$$h_{11} = 1,0; h_{14} = 0,707; h_{1,b2} \equiv 0; H_1^* = 0;$$

$$H_4^* = 25,0 \text{ t}; H_{b2}^* \equiv 0,$$

По формуле Максвелла — Мора определяем перемещения:

$$\delta_{11} = \frac{1,0 \cdot 1,0 \cdot 56,60}{5000} + \frac{0,707 \cdot 0,707 \cdot 60,0}{5000} = 0,0137;$$

$$\Delta_1 = \frac{0,707 \cdot 25,0 \cdot 60,0}{5000} = 0,2121.$$

Реакции в дополнительных связях вычисляем так, как это принято при использовании метода перемещений:

$$r_{11} = 2 \frac{20,0^2 \cdot 5000}{28,20^3} + \frac{60,0^2 \cdot 5000}{63,20^3} = 248,010;$$

$$r_{22} = 2 \frac{40,0^2 \cdot 5000}{56,50^3} + 2 \frac{20,0^2 \cdot 5000}{44,65^3} + \frac{1}{0,05} + \\ + \frac{3 \cdot 40000}{40,0^3} + \frac{60,0^2 \cdot 500}{63,20^3} = 226,490;$$

$$r_{12} = r_{21} = -\frac{60,0^2 \cdot 5000}{63,2^3} = 71,31; r'_{11} = 0;$$

$$r'_{21} = -0,707.$$

Остальные коэффициенты также определяются элементарно:

$$\delta'_{11} = 0; \delta'_{12} = 0,707; R_1 = R_2 = 0;$$

$$D_1 = D_6 = D_9 = \frac{0,1^2 \cdot 56,5^3}{12} = 150,5;$$

$$D_2 = D_3 = \frac{0,1^2 \cdot 28,2^3}{12} = 17,9;$$

$$D_5 = \frac{0,1^2 \cdot 63,2^3}{12} = 211,0; D_4 = \frac{0,1^2 \cdot 6^3}{12} = 180,0;$$

$$D_7 = D_8 = \frac{0,1^2 \cdot 44,65^3}{12} = 74,4;$$

$$C_{11} = 0; C_{12} = 0; h_{11} = 1,0;$$

$$C_{21} = +0,707; C_{22} = 0; C_{31} = -0,707; C_{32} = 0;$$

$$C_{41} = 0; C_{42} = 0; h_{14} = 0,707;$$

$$C_{51} = -0,948; C_{52} = -0,948; C_{61} = 0; C_{62} = -0,707;$$

$$C_{71} = 0; C_{72} = -0,446; C_{81} = 0; C_{82} = +0,446;$$

$$C_{91} = 0; C_{92} = +0,707.$$

Все прочие коэффициенты равны нулю, в частности равны нулю все величины, относящиеся к исходному состоянию, так как предполагается, что предварительное напряжение в исходном состоянии отсутствует (отсчет ведется от недеформированного состояния).

Система уравнений смешанного метода имеет вид:

$$0,0173 x_1 + 0,707 w_2 + 0,2121 -$$

$$-\frac{1}{2} \left[ 1,0 \frac{150,5}{(1,000 x_1)^2} + 0,707 \frac{180,0}{(25,000 + 0,707 x_1)^2} \right] = 0;$$

$$\begin{aligned}
& 248,010w_1 + 71,310w_2 + 0,707H_2 - 0,707H_3 - 0,948H_5 = 0; \\
& -0,707w_1 + 71,310w_1 + 226,490w_2 - 0,948H_5 - 0,707H_6 - \\
& \quad - 0,446H_7 + 0,446H_8 + 0,707H_9 = 0; \\
& -0,707w_1 + \frac{H_2 \cdot 28,20}{5000} - \frac{17,9}{2H_2^2} = 0; \\
& 0,707w_1 + \frac{H_3 \cdot 28,20}{5000} - \frac{17,9}{2H_3^2} = 0; \\
& 0,948w_1 + 0,948w_2 + \frac{H_5 \cdot 63,20}{5000} - \frac{211,0}{2H_5^2} = 0; \\
& 0,707w_2 + \frac{H_5 \cdot 56,50}{5000} - \frac{150,5}{2H_6^2} = 0; \\
& 0,446w_2 + \frac{H_7 \cdot 44,65}{5000} - \frac{74,4}{2H_7^2} = 0; \\
& -0,446w_2 + \frac{H_8 \cdot 44,65}{5000} - \frac{74,4}{2H_8^2} = 0; \\
& -0,707w_2 + \frac{H_9 \cdot 56,50}{5000} - \frac{150,5}{2H_9^2} = 0.
\end{aligned}$$

## § 23. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ВАНТОВО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПО ДЕФОРМИРОВАННОЙ СХЕМЕ

При выводе основных уравнений в предыдущих параграфах предполагалось, что влиянием продольных сил сжатия на величины моментов можно пренебречь. Имея в виду решение задачи расчета вантово-стержневых систем по деформированной схеме [28], составим уравнения, свободные от этого предположения, причем ограничимся случаем систем мачтового типа [50].

Пусть под воздействием внешних нагрузок узлы системы (рис. 44, а) сместились на величины  $w_p$ , а натяжения вантовых элементов стали равными  $H_b$  (рис. 44, б). Зададим узлы в деформированном состоянии от линейных смещений дополнительными связями (рис. 44, в), как это делается при использовании метода перемещений. Очевидно, что усилия в этих связях должны равняться нулю, поскольку система зафиксирована в равновесном состоянии. С другой стороны, эти же усилия рав-

ны сумме проекций натяжений вантовых элементов, примыкающих к узлу, плюс реакции неразрезной сжато-изогнутой балки (ствол мачты) с опорами смещения на  $\omega_p$ .

Следовательно, основные уравнения имеют вид

$$R_p + \sum_b C_{pb} H_b = 0, \quad (144)$$

где  $C_{pb}$  — реакции в дополнительных связях от воздействия единичных значений натяжений  $H_b$ ;

$R_p$  — реакции сжато-изогнутой неразрезной балки.

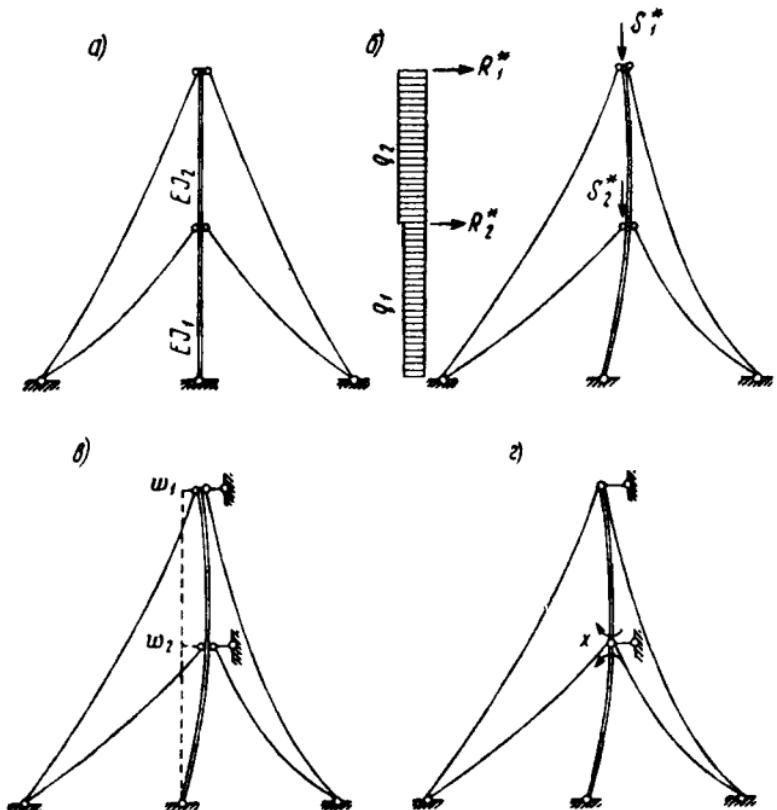


Рис. 44

Что касается значений  $R_p$ , то для их вычисления необходимо рассчитать статически неопределенные неразрезные стволы мачт, что удобно сделать по методу сил (основная система показана на рис. 44, г). Если считать, что каждый пролет имеет постоянные жесткость  $EJ_y$ ,

продольное усилие  $S_y$  и поперечную нагрузку  $q_y$ , то коэффициенты и свободные члены канонических уравнений метода сил

$$\sum_{n_1} \delta_{nn_1} x_{n_1} + \Delta_n = 0. \quad (145)$$

$$(n, n_1 = 1, 2, \dots, \bar{n})$$

могут быть вычислены по формулам [51, 73]:

$$\begin{aligned} \delta_{nn_1} = & \sum_y \frac{l_y}{6EJ_y} \left[ (m'_{ny} m'_{y n_1} + m''_{ny} m''_{y n_1}) \frac{\alpha(S_y)}{3} + \right. \\ & \left. + (m'_{ny} m''_{y n_1} + m''_{ny} m'_{y n_1}) \frac{\beta(S_y)}{6} \right]; \end{aligned} \quad (146)$$

$$\Delta_n = \sum_y \frac{q_y l_y^3}{24EJ_y} \varphi(S_y) D_{yn} - \sum_p n_{np} \omega_p; \quad (147)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha(S_y) &= \frac{3}{v_y^2} \left( 1 - \frac{v_y}{\operatorname{tg} v_y} \right); \\ \beta(S_y) &= \frac{6}{v_y^2} \left( \frac{v_y}{\sin v_y} - 1 \right); \\ \varphi(S_y) &= \frac{24}{v_y^3} \left( \operatorname{tg} \frac{v_y}{2} - \frac{v_y}{2} \right); \\ v_y &= l_y \sqrt{\frac{S_y}{EJ_y}}. \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

В уравнениях (145)–(148) введены следующие обозначения:

$x_n$  — неизвестные метода сил (опорные моменты);

$m'_{ny}$ ,  $m''_{ny}$  — моменты соответственно в начале и в конце участков от воздействия единичных значений неизвестных  $x_n$ ;

$n_{np}$  — перемещения по направлению неизвестных метода сил (взаимные углы поворота) от единичных смещений опор  $\omega_p$ ;

$D_{yn}$  — элементы матрицы, составленной из единиц и нулей<sup>1</sup>, причем  $D_{yn}=1$ , если участок  $y$

<sup>1</sup> Можно трактовать  $D_{yn}$  как коэффициенты инцидентности ис-которого графа с вершинами  $n$  и ребрами  $y$ .

примыкает к опоре, где имеется неизвестное  $n$ , и  $D_{yn}=0$  — в противном случае.

Опорные реакции  $R_p$  выражаются через значения неизвестных  $x_n$ , распределенных нагрузок  $q_y$ , сосредоточенных сил на опорах  $R_p^*$  и смещения  $w_p$  следующим образом:

$$R_p = \sum_n n_{pn} x_n + \sum_y \frac{q_y l_y}{2} A_{yp} + R_p^* + \bar{R}_p, \quad (149)$$

где  $\bar{R}_p$  — член, учитывающий смещения опор; может быть представлен зависимостью

$$\bar{R}_p = \sum_y \Delta w_y \frac{S_y}{l_y} d_{yp}. \quad (150)$$

Здесь  $\Delta w_y$  — разность смещений концов участка, вычисляемая по формуле

$$\Delta w_y = \sum_p d_{yp} w_p; \quad (151)$$

$d_{yp}$ ,  $A_{yp}$  — элементы матриц, составленных из единиц и нулей<sup>1</sup> по такому же принципу, как и  $D_{yn}$ , причем

$$d_{yp} = \begin{cases} +1, & \text{если участок } y \text{ примыкает к} \\ & \text{связи } p \text{ своим началом;} \\ -1, & \text{если участок } y \text{ примыкает к} \\ & \text{связи } p \text{ своим концом;} \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$A_{yp} = \begin{cases} 1, & \text{если участок } y \text{ примыкает к свя-} \\ & \text{зи } p; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Подставляя (149) — (151) в (144), получим в окончательном виде систему уравнений

<sup>1</sup>  $d_{yp}$  ( $A_{yp}$ ) можно трактовать как коэффициенты инцидентности ориентированного (неориентированного) графа с вершинами  $p$  и ребрами (дугами)  $y$ .

$$\begin{aligned}
& \sum_n n_{pn} x_n + \sum_y \sum_{p_1} d_{p_1 y} \frac{S_y}{l_y} d_{y p} w_p + \sum_b C_{pb} H_b + \\
& + \sum_y \frac{1}{2} q_y l_y A_{yp} + R_p^* = 0 \quad (152) \\
& (p = 1, 2, \dots, p).
\end{aligned}$$

В уравнения равновесия (152) и в условия совместности деформаций (145) входят значения сжимающих усилий  $S_y$  и величины натяжений  $H_b$ .

Первые из них можно вычислить из условий равновесия узлов относительно вертикали:

$$S_y = S_y^* + \sum_b B_{yb} H_b, \quad (153)$$

а натяжения — из уравнений состояния гибкой нити:

$$v_b = \frac{(H_b - H_b^0) L_b}{E F_b} - \frac{D_b}{2 H_b^2} + \frac{D_b^0}{2 (H_b^0)^2} + \alpha (t - t^0). \quad (154)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$S_y^*$  — усилия в участках стволов мачт от воздействия внешних вертикальных нагрузок;

$B_{yb}$  — усилия в участках  $y$  от воздействия единичных значений натяжений  $H_b$ ;

$v_b$  — удлинения хорд вантовых элементов, связанные с перемещениями узлов  $w_p$  зависимостью

$$v_b = \sum_p C_{bp} w_p. \quad (155)$$

Выполнив необходимые подстановки и несложные алгебраические преобразования, получим окончательно систему уравнений расчета мачтовых систем по деформированной схеме относительно неизвестных  $x_n$ ,  $w_p$ ,  $H_b$  и  $S_y$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n_1} \sum_y \frac{l_y}{6EJ_y} \left[ (m'_{ny} m'_{y n_1} + m''_{ny} m''_{y n_1}) \frac{\alpha(S_y)}{3} + \right. \\
& \quad \left. + (m'_{ny} m''_{y n_1} + m''_{ny} m'_{y n_1}) \frac{\beta(S_y)}{6} x_{n_1} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_y \frac{q_y l_y^3}{24EJ_y} \varphi(S_y) D_{y n} - \sum_p n_{np} w_p = 0 \right. \\
& \quad \left. (n = 1, 2, \dots, \bar{n}); \right. \\
& \sum_n n_{pn} x_n + \sum_y \sum_{p_1} d_{py} \frac{S_y}{l_y} d_{yp_1} w_{p_1} + \\
& + \sum_b C_{pb} H_b + \sum_y \frac{1}{2} q_y l_y A_{yp} + R_p^* = 0 \\
& \quad (p = 1, 2, \dots, \bar{p}); \\
& S_y - S_y^* - \sum_b B_{yb} H_b = 0 \\
& \quad (y = 1, 2, \dots, \bar{y}); \\
& \sum_p C_{bp} w_p - \frac{(H_b - H_b^0) L_b}{EF_b} - \frac{D_b}{2H_b^2} + \\
& \quad + \frac{D_b^0}{2(H_b^0)^2} + \alpha(t - t^0) = 0 \\
& \quad (b = 1, 2, \dots, \bar{b}). \quad \left. \right\} \quad (156)
\end{aligned}$$

## § 24. УРАВНЕНИЯ В ВАРИАЦИЯХ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Уравнения (156) получены с учетом влияния деформаций вантово-стержневой системы на перераспределение внутренних усилий и, следовательно, могут служить основой для суждения об устойчивости состояния равновесия. Известно, что наиболее мощным методом исследования устойчивости нелинейных систем является разработанный в трудах А. Пуанкаре и А. М. Ляпунова метод линеаризации (первый метод Ляпунова), позволяю-

щий судить о качестве движения (и равновесия, как частного случая движения) по так называемым уравнениям в вариациях.

Если движение заданной системы определяется системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (157)$$

где  $x_i$  — обобщенные координаты;  $t$  — время, то уравнения в вариациях линейны и имеют вид [38]:

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \tilde{x}_k \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (158)$$

Коэффициенты  $a_{ik}$  определяются формулой

$$a_{ik} = \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_k}, \quad (159)$$

а входящие в (158) величины  $x_k$  представляют собой отклонения возмущенного движения от невозмущенного и обычно называются *вариациями переменных*  $x_k$ , определяющих состояние системы.

При весьма общих условиях А. М. Ляпунов [38] доказал следующие теоремы, которые мы сформулируем без доказательства.

**Теорема 10.** *Невозмущенное движение (состояние равновесия) нелинейной системы асимптотически устойчиво, если определяемая соответствующими уравнениями в вариациях линейная система асимптотически устойчива (устойчиво ее состояние равновесия).*

**Теорема 11.** *Невозмущенное движение (состояние равновесия) нелинейной системы неустойчиво, если определяемая соответствующими уравнениями в вариациях линейная система неустойчива (неустойчиво ее состояние равновесия).*

Эти теоремы Ляпунова дают возможность исследовать качество равновесия нелинейных систем методами теории устойчивости линейных систем, если только записать соответствующие уравнения в вариациях.

Уравнения (156) в символической форме можно записать так:

$$\left. \begin{array}{l} f_n^{(1)}(x_1, \dots, x_{\bar{n}}, w_1, \dots, w_{\bar{p}}); S_1, \dots, S_{\bar{y}} = 0; \\ f_p^{(2)}(x_1, \dots, x_{\bar{n}}, w_1, \dots, w_{\bar{p}}); S_1, \dots, S_{\bar{y}}, H_1, \dots, H_{\bar{b}} = 0; \\ f_y^{(3)}(S_1, \dots, S_{\bar{y}}, H_1, \dots, H_{\bar{b}}) = 0; \\ f_b^{(4)}(w_1, \dots, w_{\bar{p}}, H_1, \dots, H_{\bar{b}}) = 0 \end{array} \right\} \quad (160)$$

$(n = 1, 2, \dots, \bar{n}; \quad p = 1, 2, \dots, \bar{p};$   
 $y = 1, 2, \dots, \bar{y}; \quad b = 1, 2, \dots, \bar{b}).$

Для составления уравнений в вариациях необходимо вычислить следующие частные производные:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f_n^{(1)}}{\partial x_{n_1}} = \sum_y \frac{l_y}{6EJ_y} [2(m'_{ny} m'_{y n_1} + m''_{ny} m''_{y n_1}) \alpha(S_y) + \\ + (m'_{ny} m''_{y n_1} + m''_{ny} m'_{y n_1}) \beta(S_y)]; \\ \frac{\partial f_n^{(1)}}{\partial w_p} = -n_{np}; \\ \frac{\partial f_n^{(1)}}{\partial S_y} = \sum_{n_1} \frac{x_n l_y}{6EJ_y} \left[ 2(m'_{ny} m'_{y n_1} + m''_{ny} m''_{y n_1}) \frac{d\alpha(S_y)}{dS_y} + \right. \\ \left. + (m'_{ny} m''_{y n_1} + m''_{ny} m'_{y n_1}) \frac{d\beta(S_y)}{dS_y} \right] + \\ + \frac{q l_y^3 D_{yn}}{24EJ_y} \cdot \frac{d\varphi(S_y)}{dS_y}; \\ \frac{\partial f_n^{(1)}}{\partial H_b} = 0; \end{array} \right\} \quad (161)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f_p^{(2)}}{\partial x_n} = n_{pn}; \quad \frac{\partial f_p^{(2)}}{\partial w_{p_1}} = \sum_y d_{py} \frac{S_y}{l_y} d_{yp_1}; \\ \frac{\partial f_p^{(2)}}{\partial S_y} = \sum_{p_1} \frac{w_{p_1} d_{p_1 y} d_{yp}}{l_y}; \quad \frac{\partial f_p^{(2)}}{\partial H_b} = C_{pb}; \end{array} \right\} \quad (162)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f_y^{(3)}}{\partial x_n} = \frac{\partial f_y^{(3)}}{\partial w_p} = 0; \quad \frac{\partial f_y^{(3)}}{\partial S_y} = 1; \quad \frac{\partial f_y^{(3)}}{\partial H_b} = B_{yb}; \end{array} \right\} \quad (163)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_b^{(4)}}{\partial x_n} &= \frac{\partial f_b^{(4)}}{\partial S_y} = 0; \quad \frac{\partial f_b^{(4)}}{\partial w_p} = -C_{bp}; \\ \frac{\partial f_b^{(4)}}{\partial H_b} &= \frac{L_b}{EF_b} + \frac{D_b}{H_b^3}. \end{aligned} \right\} \quad (164)$$

Система уравнений в вариациях будет иметь такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n_1} \tilde{x}_{n_1} \frac{\partial f_n^{(1)}}{\partial x_{n_1}} - \sum_{p_1} \tilde{w}_{p_1} n_{p_1, n} + \sum_y \tilde{S}_y \frac{\partial f_n^{(1)}}{\partial S_y} &= 0; \\ \sum_{n_1} \tilde{x}_{n_1} n_{n_1, p} + \sum_{p_1} \tilde{w}_{p_1} \frac{\partial f_p^{(2)}}{\partial w_{p_1}} + \sum_y \tilde{S}_y \frac{\partial f_p^{(2)}}{\partial S_y} + \\ &+ \sum_b \tilde{H}_b C_{bp} = 0; \\ \tilde{S}_y + \sum_b \tilde{H}_b B_{by} &= 0; \\ - \sum_{p_1} \tilde{w}_{p_1} C_{p_1 b} + \tilde{H}_b \frac{\partial f_b^{(4)}}{\partial H_b} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (165)$$

Полученная система уравнений линейна относительно вариаций  $\tilde{x}_n$  ( $n = 1, 2, \dots, \bar{n}$ ),  $\tilde{w}_p$  ( $p = 1, 2, \dots, \bar{p}$ ),  $\tilde{S}_y$  ( $y = 1, 2, \dots, \bar{y}$ ) и  $\tilde{H}_b$  ( $b = 1, 2, \dots, \bar{b}$ ). Ее можно упростить, исключив неизвестные  $\tilde{S}_y$  и  $\tilde{H}_b$ , которые входят элементарным образом в третью и четвертую группу уравнений (165). При этом окончательно получим линейную однородную систему  $(\bar{n} + \bar{p})$  уравнений относительно вариаций  $\tilde{x}_n$  и  $\tilde{w}_p$ , исследование которой и дает нам основание для суждения об устойчивости (в малом) заданной вантово-стержневой системы.

# Глава 6. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА СИЛ ПРИ ПОМОЩИ КООРДИНАТНОГО СПУСКА

## § 25. ИДЕЯ МЕТОДА КООРДИНАТНОГО СПУСКА

Для решения системы нелинейных уравнений метода сил

$$\sum_{n_1} \bar{\delta}_{nn_1} x_{n_1} + \bar{\Delta}_n - \\ - \frac{1}{2} \sum_b h_{nb} \left[ \frac{D_b}{(H_b^0 + H_b^* + \sum_n h_{bn} x_n)^2} - \frac{D_b^0}{(H_b^0)^2} \right] = 0 \quad (166)$$

применим метод спуска [18, 20], краткое описание которого приводится ниже.

Решение системы нелинейных уравнений

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n) \quad (167)$$

сведем к задаче отыскания минимума некоторой функции  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ , которую можно построить различными способами, положив, например,

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i^2(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (168)$$

или

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) a_{ij} f_j(x_1, \dots, x_n), \quad (169)$$

где  $a_{ij}$  — элементы некоторой положительной определенной матрицы.

Функцию  $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  можно построить и другими способами, важно при этом лишь одно — минимум этой функции должен достигаться в точке  $X^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ , координаты которой являются решением системы (167). В задачах строительной механики в качестве функции  $\Phi$  удобно принимать энергию деформаций (если решение выполняется по методу перемещений) или функцию дополнительной энергии (если решение выполняется по методу сил). В обоих случаях минимум  $\Phi$  совпадает с решением системы соответствующих канонических уравнений.

Для дальнейшего будет удобно пользоваться геометрической терминологией. Для этого введем в рассмотрение  $(n+1)$ -мерное пространство с координатами  $\{\Phi, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , в котором условие (168) или аналогичное ему изображает некоторую гиперповерхность  $S$ . Можно говорить, что задача состоит в том, чтобы определить координаты «наизнешней» точки на поверхности  $S$ , для чего обычно используются методы спуска.

Примем в качестве начального приближения к решению задачи точку  $X^{(0)} = \{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\}$  и выберем какую-нибудь гиперплоскость, содержащую точку  $X^{(0)}$  и параллельную оси  $\Phi$ , которая пересекает поверхность  $S$  по некоторой линии  $L^{(0)}$ . Очевидно, что, двигаясь вдоль этой линии до тех пор, пока на ней не встретится точка минимума  $X^{(1)}$ , можно уменьшить значение функции  $\Phi$ . В точке  $X^{(1)}$  можно повторить те же построения, т. е. выбрать новую гиперплоскость, которая определяет новое направление  $L^{(1)}$  и, двигаясь вдоль  $L^{(1)}$ , найти точку минимума  $X^{(2)}$ . Таким образом, получаем последовательность точек  $X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots$ , каждая из которых лежит более близко к  $X^*$ , чем предыдущая (рис. 45).

В зависимости от того, каким образом выбирают направления  $L^{(i)}$ , можно «спуститься» к решению  $X^*$  за большее или меньшее число шагов. Часто применяют метод «наискорейшего» спуска, в котором направления  $L^{(i)}$  совпадают с наибольшей крутизной ската поверхности  $S$  в точке  $X^{(i)}$ . Однако при этом следует в каждой из точек  $X^{(i)}$  вычислять градиент  $\Phi$  (направление наиболее быстрого изменения  $\Phi$ ), что в некоторых случаях существенно усложняет вычисления. Более просто организуются вычисления, если выбирать направления  $L^{(i)}$  параллельными координатным плоскостям, изменяя за один раз

только одну из координат в фиксированном порядке (например, в соответствии с нумерацией координат). В этом случае может потребоваться сделать большее число шагов, однако каждый из них упрощается.

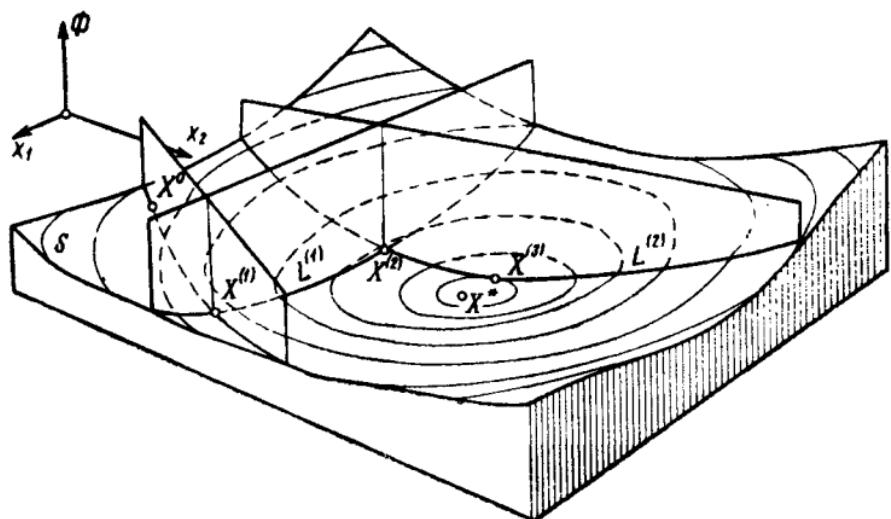


Рис. 45

Таким образом, каждый из шагов описанного выше координатного спуска сводится к уточнению  $j$ -й неизвестной в системе нелинейных уравнений или к решению одного нелинейного уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0 \quad (170)$$

относительно неизвестной  $x_j$  при неизменных значениях всех прочих неизвестных.

Применительно к системе уравнений метода сил (166), когда  $\Phi = U^*$ , уравнение (170) выражает условие совместности деформаций в месте устраниенной  $j$ -й связи, так как частная производная от функции дополнительной работы  $U^*$  равна обобщенному перемещению.

Таким образом, механический смысл тех расчетных операций, которые выполняются при использовании метода координатного спуска, сводится к следующему:

а) подбирается такое значение первого неизвестного, которое обеспечивает «замыкание» первой разрезанной связи;

б) второе неизвестное подбирается с тем расчетом, чтобы «замкнулась» вторая разрезанная связь, а вычисленное ранее первое неизвестное считается зафиксированным и может быть отнесено к внешним воздействиям (при этом, естественно, условие замкнутости первого разреза нарушается);

в) третье, четвертое и т. д. неизвестные вычисляются при найденных ранее фиксированных значениях второго, третьего и т. д. неизвестных;

г) после определения последнего неизвестного цикл расчета повторяется, начиная с первого неизвестного, которое разыскивается при фиксированных значениях всех остальных неизвестных, полученных на предыдущем цикле.

Следует отметить, что для выполнения перечисленных выше шагов координатного спуска вовсе не обязательно заранее вычислять и хранить в запоминающем устройстве все коэффициенты системы нелинейных уравнений, а можно вычислять некоторые из них, по мере надобности, каждый раз заново на очередном шаге. Это обстоятельство создает определенные удобства при выполнении счета на ЭЦВМ с ограниченным объемом запоминающих устройств.

С учетом изложенной выше идеи рассмотрим более подробно процесс решения системы нелинейных уравнений (166) методом координатного спуска.

Пусть выбрано некоторое приближение для значений неизвестных  $\{x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}\}$ , соответствующее  $j$ -му этапу расчета. Если считать, что все  $x_n^{(j)}$  приложены в тех местах, где устраниены соответствующие связи, а величины их зафиксированы, то можно найти перемещения по направлению устраниенных связей:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^{(j)} = & \sum_{n_1} \bar{\delta}_{nn_1} x_{n_1}^{(j)} + \bar{\Delta}_n - \\ & - \frac{1}{2} \sum_b h_{nb} \left[ \frac{D_b}{(H_b^0 + H_b^* + \sum_n h_{bn} x_n^{(j)})^2} - \frac{D_b^0}{(H_b^0)^2} \right]. \quad (171) \end{aligned}$$

Будем менять одно из неизвестных, например  $x_{n_l}^{(j)}$ , давая ему приращение, равное  $\Delta x_{n_l}^{(j)}$ . При этом значение пере-

мещения в месте устраниной  $n_i$ -й связи изменится на величину

$$\Delta \varepsilon_{n_i}^{(j)} = \bar{\delta}_{n_i n_i} \cdot \Delta x_{n_i}^{(j)} - \frac{1}{2} \sum_b h_{nb} \left[ \frac{D_b}{(H_b^{(j)} + \Delta H_b^{(j)})^2} - \frac{D_b}{(H_b^{(I)})^2} \right], \quad (172)$$

где  $H_b^{(j)}$  — натяжения вантовых элементов, соответствующие значениям неизвестных  $x_n^{(j)}$ , т. е.

$$H_b^{(j)} = H_b^0 + H_b^* + \sum_n h_{bn} x_n^{(j)}, \quad (173)$$

а  $\Delta H_b^{(j)}$  — приращения натяжений от изменения  $x_n^{(j)}$  на величину  $\Delta x_{n_i}^{(j)}$ , равные:

$$\Delta H_b^{(j)} = h_{n_i b} \Delta x_{n_i}^{(j)}. \quad (174)$$

С учетом (174)

$$\Delta \varepsilon_{n_i}^{(j)} = \bar{\delta}_{n_i n_i} \Delta x_{n_i}^{(j)} - \Delta \varepsilon_{n_i}^{(j)} = \bar{\delta}_{n_i n_i} \Delta x_{n_i}^{(j)} - \frac{1}{2} \sum_b h_{n_i b} D_b \left[ \frac{1}{(H_b^{(j)} + h_{bn_i} \Delta x_{n_i}^{(j)})^2} - \frac{1}{(H_b^{(I)})^2} \right]. \quad (175)$$

Для того чтобы выполнялось условие замыкания  $n_i$ -й связи, требуется, чтобы

$$\varepsilon_{n_i}^{(j)} + \Delta \varepsilon_{n_i}^{(j)} = 0. \quad (176)$$

Рассматривая (176) как нелинейное уравнение относительно неизвестного  $\Delta x_{n_i}^{(j)}$ , можно решить его любым известным приближенным методом и уточнить значение  $n_i$ -го неизвестного, после чего процесс повторяется для  $n_{i+1}$ -й связи.

## § 26. ВОПРОСЫ СХОДИМОСТИ. ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Изложенный в предыдущем параграфе метод координатного спуска сходится, если минимум функции  $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  является единственным и на любом из направлений  $L^{(i)}$  имеется только одна точка относительного минимума. Другими словами можно говорить, что метод

координатного спуска сходится, если каждое из уравнений типа (176) имеет единственный действительный корень.

Выше было доказано, что функция дополнительной работы  $U^*$  является выпуклой и имеет единственный минимум в той области значений неизвестных  $\Omega$ , где выполняется неравенство

$$H_b^0 + H_b^* + \sum_n h_{bn} x_n \geq 0 \quad (b = 1, 2, \dots, \bar{b}). \quad (177)$$

Следовательно, решая на каждом этапе нелинейное уравнение (176), необходимо выбирать тот из корней уравнения, который находится в области  $\Omega$ . Это дает нам возможность выделить интервал, где находится единственный интересующий нас корень уравнения (176).

Рассмотрим условия, которым должны удовлетворять значения  $\Delta x_{n_i}^{(j)}$ , чтобы обеспечивалась справедливость неравенств (177). Их можно записать таким образом:

$$\Delta x_{n_i}^{(j)} \begin{cases} > -\frac{H_b^{(j)}}{h_{n_i b}}, & \text{если } h_{n_i b} > 0; \\ < -\frac{H_b^{(j)}}{h_{n_i b}}, & \text{если } h_{n_i b} < 0 \end{cases} \quad (178)$$

$$(b = 1, 2, \dots, \bar{b}).$$

Для зафиксированного номера неизвестного  $n_i$  неравенства (178) могут дать как одностороннюю, так и двустороннюю оценку области существования корня, причем односторонняя оценка получится в том случае, когда величины  $h_{n_i b}$  имеют постоянный знак для всех вантовых элементов, в которых от воздействия неизвестного  $x_{n_i}$  возникают ненулевые усилия. Вместе с тем удобно иметь всегда двусторонние оценки для корня нелинейного уравнения (176), которые мы получили, используя очевидные свойства графика функции

$$f = \bar{\delta}_{n_i n_i} \Delta x_{n_i}^{(j)} - e_{n_i}^{(j)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_b h_{n_i b} D_b \left[ \frac{1}{(H_b^{(j)})^2} - \frac{1}{(H_b^{(j)} + h_{b n_i} \Delta x_{n_i}^{(j)})^2} \right], \quad (179)$$

нулий которой являются корнями уравнения (176). Четыре возможных варианта такого графика показаны на рис. 46, причем для всех вариантов характерными являются следующие свойства:

а) при  $\Delta x_{n_i}^{(j)} = 0$  значение функции

$$f = -\varepsilon_{n_i}^{(j)}, \quad (180)$$

что следует из (179);

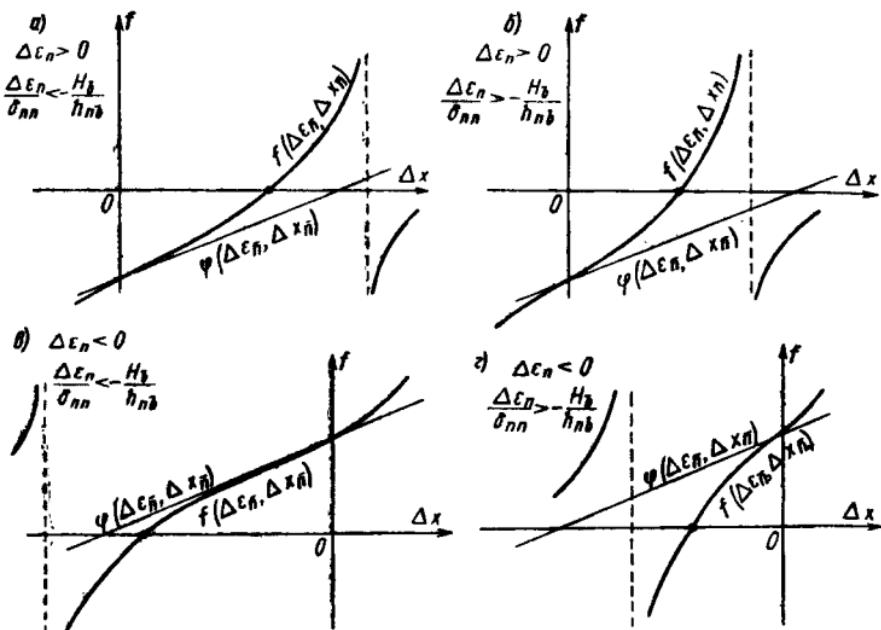


Рис. 46

б) прямая

$$\varphi = \bar{\delta}_{n_i n_i} \Delta x_{n_i}^{(j)} - \varepsilon_{n_i}^{(j)} \quad (181)$$

имеет положительный уклон (поскольку  $\bar{\delta}_{n_i n_i} \geq 0$ ) и лежит ниже кривой (179) в области положительных значений  $\Delta x_{n_i}^{(j)}$ , а в области отрицательных значений  $\Delta x_{n_i}^{(j)}$  выше кривой, что следует из рассмотрения значения производной  $\frac{d(\Delta \varepsilon_{n_i})}{d(\Delta x_{n_i})}$ ;

в) нуль функции (179) находится ближе к началу координат, чем точка пересечения прямой (181) с осью  $\Delta x_{n_i}^{(j)}$ ;

г) знак корня совпадает со знаком  $\varepsilon_{n_i}^{(j)}$ .

На основании перечисленных свойств кривой (179) можно утверждать, что область существования корня определяется наиболее тесными из неравенств:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leqslant |\Delta x_{n_i}^{(j)}| \leqslant \frac{\varepsilon_{n_i}^{(j)}}{\delta_{n_i n_i}}; \\ \Delta x_{n_i}^{(j)} \left\{ \begin{array}{l} > -\frac{H_b^{(j)}}{h_{n_i b}} (h_{n_i b} > 0); \\ < -\frac{H_b^{(j)}}{h_{n_i b}} (h_{n_i b} < 0). \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (182)$$

Наличие двусторонних оценок (182) позволяет построить алгоритм поиска корня, в основе которого лежат следующие операции:

1) отыскиваются границы области существования корня, при этом противоречивость системы неравенств (182) свидетельствует об отсутствии решения задачи<sup>1</sup>;

2) значение  $\Delta x_{n_i}^{(j)}$ , соответствующее середине промежутка, подставляют в правую часть (179) и, если  $f(\Delta x_{n_i}^{(j)}) \neq 0$  (что свидетельствует об окончании процесса), корень следует искать в левой половине промежутка при

$$f(\Delta x_{n_i}^{(j)}) > 0$$

и в правой половине при

$$f(\Delta x_{n_i}^{(j)}) < 0;$$

3) в (179) подставляется значение  $\Delta x_{n_i}^{(j)}$ , соответствующее середине нового значения промежутка, и т. д., пока не будет

$$f(\Delta x_{n_i}^{(j)}) \approx 0. \quad (183)$$

Таким образом, имея алгоритм для определения единственного интересующего нас корня нелинейного

<sup>1</sup> Если неравенства (182) противоречивы, то это значит, что рассматривается изменяемая вантово-стержневая система, загруженная неравновесной нагрузкой.

уравнения, можно утверждать, что во время процесса координатного спуска все точки  $X^{(i)}$  (см. § 25) будут лежать в области допустимых значений (в смысле неотрицательности величины  $H_b$ ), если только первая точка  $X^{(0)}$  лежит в этой же области.

## § 27. ОТЫСКАНИЕ НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Выше было показано, что если первое приближение лежит в области допустимых значений неизвестного (т. е. обеспечивается неотрицательность всех значений натяжений  $H_b$ ), то можно построить алгоритм координатного спуска таким образом, что ни одно из приближений не выйдет из области допустимых значений неизвестного. Поскольку в этой области для каждого из условий (176) существует единственный корень<sup>1</sup>, очевидно, можно утверждать, что и полученное решение будет единственным в допустимой области, если такое решение существует.

Однако отыскание исходного приближения  $x_n^{(0)}$ , удовлетворяющего  $\bar{b}$  неравенствам,

$$H_b^0 + H_b^* + \sum_n h_{bn} x_n^{(0)} \geq 0 \quad (184)$$

$$(b = 1, 2, \dots, \bar{b}),$$

представляет собой достаточно сложную задачу, к решению которой сейчас мы приступим.

В первую очередь покажем, что наиболее естественный путь — принять в качестве исходных нулевые значения  $x_n^{(0)}$  в общем случае не приводит к цели. Действительно, при этом должны соблюдаться неравенства

$$H_b^0 + H_b^* > 0, \quad (185)$$

а это невозможно при произвольном выборе основной системы. Так, для простейшей мачтовой конструкции (рис. 47, а) в основной системе (рис. 47, б) всегда выполняется неравенство (185), а в основной системе  $P$  (рис. 47, в) при достаточно больших значениях  $P$  оно будет нарушено.

<sup>1</sup> Следует напомнить, что здесь не рассматривается задача об устойчивости вантово-стержневой системы.

Можно ли для произвольной вантово-стержневой системы, загруженной произвольной системой сил, найти такую основную систему, в которой соблюдаются условия (185)?.

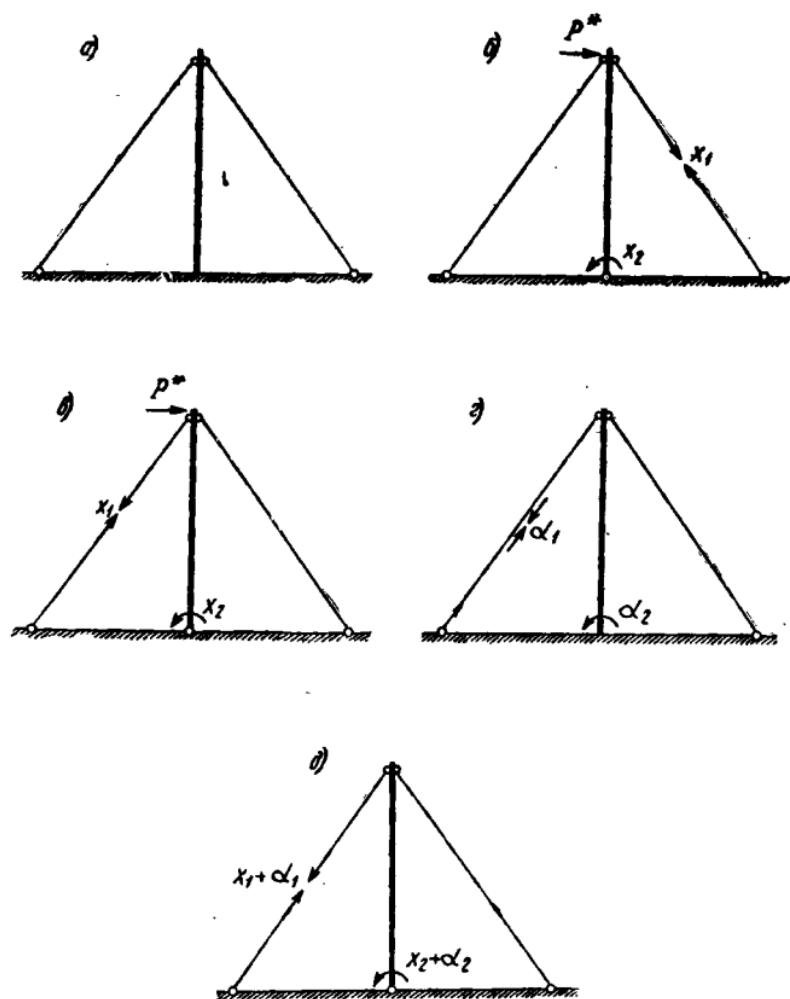


Рис. 47

По-видимому, на этот вопрос следует ответить утвердительно, так как всегда можно подобрать такие добавочные величины  $\alpha_n$ , что при

$$x_n^{(0)} = 0 \\ (n = 1, 2, \dots, \bar{n})$$

выполняются условия

$$H_b^0 + H_b^* + \sum_n h_{bn} (x_n^{(0)} + a_n) > 0 \quad (186)$$

$$(b = 1, 2, \dots, \bar{b}).$$

Прибавление к неизвестным  $\bar{x}_n$  величины  $a_n$  соответствует параллельному переносу координатных осей в пространстве неизвестных  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , а это можно сделать таким образом, чтобы начало координат попало в область допустимых значений неизвестных<sup>1</sup>. Поскольку изменение начала отсчета не влияет на свойства потенциальной функции  $U^*$  и, следовательно, на уравнение (176), то окончательные результаты не изменяются и операцию преобразования неизвестных  $x_n$  в

$$x'_n = x_n + a_n \quad (187)$$

можно трактовать как замену основной системы.

Преобразованию (187) можно дать и такое статическое толкование — вместо усилий  $H_b^*, N_c^*$  и  $M_y^*$  в основной системе используются величины:

$$\left. \begin{array}{l} H_b^* + \sum_n h_{bn} a_n; \\ N_c^* + \sum_n n_{cn} a_n; \\ M_y^* + \sum_n m_{yn} a_n, \end{array} \right\} \quad (188)$$

где  $a_n$  — некоторые произвольные числа. При этом окончательные результаты расчета не изменяются, поскольку такая операция соответствует додружению заданной вантово-стержневой системы дополнительными взаимно уравновешенными усилиями, приложенными там, где предполагается устранить лишние связи для образования основной системы. Такие взаимно уравновешенные усилия (рис. 47, г, д) являются обобщенными нулевыми воздействиями [57] и, следовательно, не могут изменить окончательного результата, несмотря на то что усилия в основной системе меняются.

<sup>1</sup> При этом, естественно, предполагается, что такая область существует, т. е. неравенства (184) непротиворечивы.

Таким образом, можно считать доказанным, что всегда существует возможность подбора такой основной системы, у которой все натяжения вантовых элементов являются положительными, и остается лишь указать алгоритм поиска такой системы.

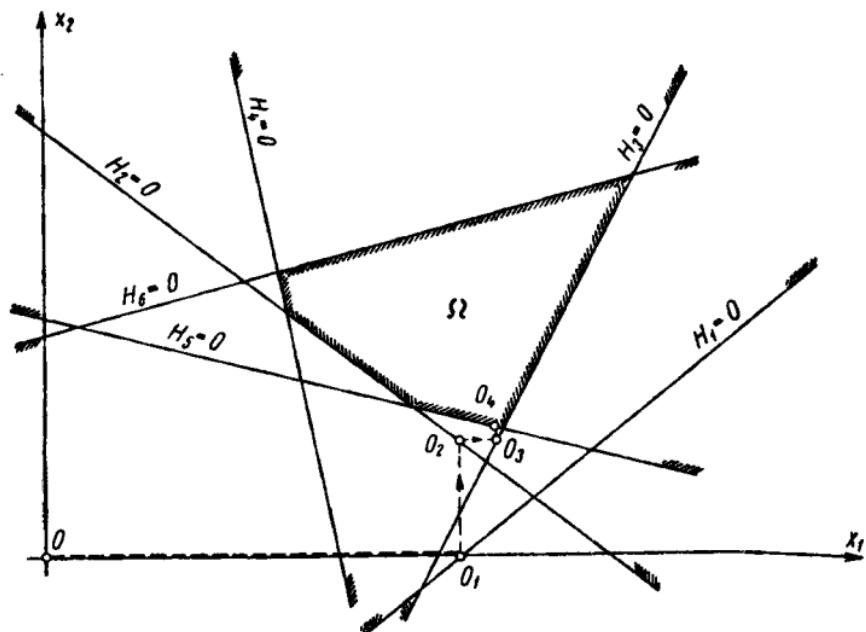


Рис. 48

Идея такого алгоритма состоит в том, что для каждого отрицательного  $H_{b_1}^*$ , который получается в результате расчета произвольной основной системы, подбираются такие множители  $a_n$ , которые «не портят» положительные значения  $H_{b_2}^*$  ( $b_2 < b_1$ ), полученные ранее. Иллюстрация алгоритма представлена на рис. 48, а обоснование его лучше всего привести в геометрической трактовке.

Наличие отрицательного  $H_{b_1}^*$  означает, что начало координат лежит вне области допустимых значений неизвестных  $\Omega$  (либо, что условия (177) противоречивы и области  $\Omega$  не существует), причем гиперплоскость  $H_{b_1}^* + \sum h_{b_1 n} x_n = 0$  отделяет начало координат от  $\Omega$ .

Каждый шаг алгоритма означает перенос начала координат вдоль осей, параллельных координатным, в сто-

руну  $\Omega$  отделяющей гиперплоскости  $H_{b_1}^* + \sum_n h_{b_1 n} x_n = 0$  до тех пор, пока это движение находится в допустимой области пространства, определяемой не всеми, а лишь «предыдущими» (в смысле нумерации) гиперплоскостями.

Из того факта, что «предыдущие» (или уже «проработавшие») неравенства в дальнейшем уже не нарушаются, следует *монотонность* алгоритма, а тот факт, что число неравенств (177), конечно, убеждает нас в том, что полученный алгоритм является *сходящимся*.

Работу алгоритма для случая двух неизвестных и шести ограничений можно проиллюстрировать в геометрической трактовке:

а) шаг  $O—O_1$  соответствует улучшению ограничения 2 при помощи изменения координаты  $x_1$  до тех пор, пока это позволяет ограничение 1;

б) шаг  $O_1—O_2$  соответствует улучшению ограничения 2 при помощи изменения координаты  $x_2$ ;

в) после шага  $O_1—O_2$  случайно оказалось, что ограничения 3 и 4 улучшены и остается лишь улучшить ограничение 5;

г) шаг  $O_2—O_3$  соответствует улучшению этого ограничения при помощи изменения  $x_1$  до тех пор, пока это позволяют ограничения 1—4;

д) последним шагом  $O_3—O_4$  координата  $x_2$  улучшает ограничения 5 и выводит точку  $O_4$  на границу области  $\Omega$ .

Описанный выше алгоритм приводит нас всегда на границу области допустимых значений неизвестных, при этом по крайней мере одно из натяжений, например натяжение вантового элемента  $b_1$ , равно нулю, т. е.

$$H_{b_1}^{(0)} = H_{b_1}^{(0)} + H_{b_1}^* + \sum_n h_{b_1 n} x_n = 0. \quad (189)$$

Здесь вновь содержится определенное неудобство, поскольку при  $H_{b_1}^{(0)} = 0$  обращается в бесконечность величина  $\Delta e_{n_i}^{(0)}$  [см. (175)] и, следовательно, верхняя оценка корня уравнения (176), вычисленная по формулам (182), может лежать на бесконечности. Такой результат, правильный по существу, не может быть признан удачным с точки зрения построения вычислений, и именно поэтому мы оцениваем выражение (189) как несущее неудобство.

Для систем, допускающих создание предварительного напряжения в нагруженном состоянии, можно ука-

зать на прием, позволяющий обойти описанное неудобство. Для этого сузим область  $\Omega$  до размера  $\Omega^*$ , ограничив ее неравенствами

$$H_b^* + \sum_n h_{bn}x_n \geq 0 \quad (190)$$

вместо неравенств (177).

Если теперь применить описанный выше алгоритм, то мы перенесем начало координат на границу суженной области  $\Omega^*$ , а исходное приближение  $H_{b_1}^{(0)}$  окажется лежащим внутри области  $\Omega$ , так как на границе области  $\Omega^*$  выполняется лишь условие

$$H_{b_1}^* + \sum_n h_{b_1 n} x_n = 0, \quad (191)$$

но

$$H_{b_1}^0 + H_{b_1}^* + \sum_n h_{b_1 n} x_n = H_{b_1}^0 > 0. \quad (192)$$

Это прием, к сожалению, не может быть без ограничений применен к вантово-стержневым системам, не допускающим предварительного напряжения в ненагруженном состоянии, поскольку здесь область  $\Omega^*$  может иметь с  $\Omega$  часть общей границы или совпадать с ней полностью. Однако в большинстве случаев упомянутым приемом рекомендуется пользоваться.

Что касается случая систем без предварительного напряжения в ненагруженном состоянии, то при их расчете, очевидно, следует использовать более тонкие оценки модуля корня, чем те, которые даются первым из неравенств (182), либо использовать приемы вычисления корня нелинейного уравнения, не требующие двусторонних оценок области существования корня.

В заключение отметим, что все описанные выше приемы для поиска границы области являются типичными приемами математического программирования [21, 34, 92] и, по-видимому, могут быть решены в других вариантах. В частности, можно было бы использовать и классический симплекс-метод Данцига, однако при этом в матрице на местах нулевых членов могли бы появиться какие-либо числа. Это требует расширения количества ячеек оперативной памяти, в то время как описанный выше метод позволяет записать матрицу  $\|h_{bn}\|$  компактно (без нулевых элементов).

# Глава 7. ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА НЬЮТОНА — КАНТОРОВИЧА

## § 28. МЕТОД НЬЮТОНА — КАНТОРОВИЧА И ЕГО МЕХАНИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Системы алгебраических уравнений, к которым приводит использование метода сил и метода перемещений (а также и смешанного метода), являются нелинейными. Методы решения таких систем немногочисленны и разработаны недостаточно подробно. Одним из наиболее широко применяющихся методов является метод Ньютона.

В первую очередь дадим математическое описание этого метода решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Параллельно выясним физический смысл тех математических операций, к которым приходится прибегать при использовании метода.

Как известно [15, 18], сущность метода Ньютона состоит в том, что некоторое  $i$ -е приближение  $\{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}\}$  к точному решению  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  системы уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\} \quad (193)$$

уточняется путем решения системы линеаризованных уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} f_1^{(i)} + \frac{\partial f_1^{(i)}}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial f_1^{(i)}}{\partial x_2} z_2 + \cdots + \frac{\partial f_1^{(i)}}{\partial x_n} z_n = 0; \\ f_2^{(i)} + \frac{\partial f_2^{(i)}}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial f_2^{(i)}}{\partial x_2} z_2 + \cdots + \frac{\partial f_2^{(i)}}{\partial x_n} z_n = 0; \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f_n^{(i)} + \frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial x_2} z_2 + \cdots + \frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial x_n} z_n = 0. \end{array} \right\} \quad (194)$$

Здесь  $f_j^{(i)} = f_j(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$

$(j = 1, 2, \dots, n);$

$$\frac{\partial f_j^{(i)}}{\partial x_k} = \frac{\partial f_j(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})}{\partial x_k}$$

$(j, k = 1, 2, \dots, n);$

$x_j^{(i+1)} - x_j^{(i)}$  — погрешность компоненты  $j$  приближенного решения к уточненному на  $i$ -м этапе.

Если определитель

$$\Delta^{(i)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1^{(i)}}{\partial x_1}; \frac{\partial f_1^{(i)}}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_1^{(i)}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2^{(i)}}{\partial x_1}; \frac{\partial f_2^{(i)}}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_2^{(i)}}{\partial x_n} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial x_1}; \frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n^{(i)}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (195)$$

то можно решить систему (194) и получить компоненты уточненного решения из соотношений:

$$x_j^{(i+1)} = x_j^{(i)} - \frac{\Delta_j^{(i)}}{\Delta^{(i)}} \quad (196)$$

$(j = 1, 2, \dots, n)$

или

$$x_j^{(i+1)} = x_j^{(i)} - \sum_{k=1}^n f_k^{(i)} g_{kj}^{(i)}. \quad (196a)$$

Здесь  $\Delta_j^{(i)}$  — определитель, получающийся при замене  $j$ -го столбца в определителе  $\Delta^{(i)}$  числами  $f_1^{(1)}, \dots, f_i^{(n)}$ ;

$g_{kj}^{(i)}$  — элементы обратной матрицы (по отношению к матрице, для которой записан определитель  $\Delta^{(i)}$ ).

Если процесс начат от какого-либо исходного приближения  $\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\}$ , то, повторяя его  $m$  раз, придем к приближенному решению  $\{x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}\}$ , точность которого может быть оценена близостью к нулю величин  $f_1^{(m)}, f_2^{(m)}, \dots, f_n^{(m)}$ .

Описанный выше процесс сложен тем, что при каждом последовательном приближении необходимо находить элементы обратной матрицы или во всяком случае решать уравнения (194). В связи с этим более удобным оказывается использование модификации метода Ньютона, предложенной Л. В. Канторовичем [22].

Метод Ньютона—Канторовича состоит в том, что в уравнениях (196а) на всех этапах последовательных приближений элементы обратной матрицы  $g_{kj}^{(l)}$  заменяются на  $g_{kj}^{(0)}$  или, что то же самое, решается система уравнений

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial x_k} (x_k^{(l+1)} - x_k^{(l)}) + f_j^{(l)} = 0 \quad (197)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n).$$

Этот метод сходится несколько медленнее, чем описанный в начале настоящего параграфа, однако возможность существенно упростить итерации окупает увеличение числа этапов последовательных приближений и в конечном счете может ускорить вычисление.

Для того чтобы уяснить физический смысл расчетных операций метода Ньютона—Канторовича, в первую очередь рассмотрим величины  $\frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial x_k}$ , являющиеся коэффициентами линеаризованной системы уравнений (197).

Для уравнений метода сил (98):

$$f_n^{(l)} = \sum_{n_1} \bar{\delta}_{nn_1} x_{n_1}^{(l)} + \bar{\Delta}_n -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_b h_{nb} \left[ \frac{D_b}{(H_b^0 + H_b^* + \sum_n h_{bn} x_n^{(l)})^2} - \frac{D_b^0}{(H_b^0)^2} \right]; \quad (198)$$

$$\frac{\partial f_n^{(0)}}{\partial x_{n_1}} = \bar{\delta}_{nn_1} + \sum_b \frac{h_{nb} D_b h_{bn_1}}{(H_b^0 + H_b^* + \sum_n h_{bn} x_n^{(0)})^3} =$$

$$= \bar{\delta}_{nn_1} + \sum_b \frac{h_{nb} D_b h_{bn_1}}{(H_b^0)^3}. \quad (199)$$

Подставляя сюда значение  $\bar{b}_{nn_1}$  из (162) и учитывая, что в том случае, когда нити являются упругими, вантовые элементы имеют двойную нумерацию (с индексом  $c$  и индексом  $b$ ), т. е. каждому значению  $h_{nb}$  можно найти соответствующее ему  $n_{nc}$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_n^{(0)}}{\partial x_{n_1}} = & \sum_c \int \frac{n_{nc} n_{cn_1}}{EF_c} dl_c + \sum_y \int \frac{m_{ny} m_{yn_1}}{EJ_y} ds_y + \\ & + \sum_b \int h_{nb} h_{bn_1} \left[ \frac{1}{EF_b} + \frac{D_b}{(H_b^{(0)})^3} \right] dL_b. \end{aligned} \quad (200)$$

Нетрудно заметить, что это выражение равно перемещению по направлению неизвестного  $n$  от воздействия неизвестного  $n_1$ , вычисленному для обычной комбинированной стержневой системы (линейной), которую мы получим из заданной вантово-стержневой конструкции, если заменим все гибкие нити стержнями с приведенной жесткостью:

$$\overline{EF} = \frac{1}{\frac{1}{EF} + \frac{D}{(H^{(0)})^3}}. \quad (201)$$

Следовательно, решение системы линеаризованных уравнений (197), которое мы выполняем при каждой итерации, является ничем иным, как расчетом описанной выше комбинированной стержневой системы (мы ее будем называть *вспомогательной системой* [50]).

К аналогичному выводу можно прийти, если рассматривать систему уравнений метода перемещений. Там коэффициенты равны реакции в наложенных связях основной системы при решении линейной вспомогательной системы методом перемещений.

Таким образом, решение системы уравнений метода перемещений (метода сил) с использованием итерационного способа Ньютона — Канторовича состоит в том, что выбирается вспомогательная система и рассчитывается на заданные воздействия по методу перемещений (сил). В результате этого расчета получим значения неизвестных перемещений (неизвестных метода сил), а затем вычислим невязки, для чего узлам действительной нелинейной системы сообщают смещения (в разрезах приклады-

вают усилия), полученные из расчета линейной вспомогательной системы.

Уточненные решения вновь разыскиваются как неизвестные перемещения (неизвестные метода сил) в линейной вспомогательной системе, но уже под воздействием скорректированных на величину невязки реакций в лишних связях (скорректированных значений грузовых перемещений основной системы). Процесс повторяется до тех пор, пока величины невязок не станут пренебрежимо малыми.

## § 29. СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

При решении системы уравнений

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ (i=1, 2, \dots, n) \quad (202)$$

с якобиевой матрицей

$$f_x(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (203)$$

условия сходимости формулируются в виде следующей теоремы, доказанной Л. В. Канторовичем [22].

**Теорема 12.** Если в области  $G$  функции  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  имеют вторые производные, не превосходящие по абсолютной величине числа  $L$ , в точке  $x^{(0)} \in G$  матрица  $f_x(x)$  не вырождена и выполнено условие

$$h = M^2 L \eta n^2 \leqslant \frac{1}{2}, \quad (\text{A})$$

где  $\eta \geq |f_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})|$ ;

$$M \geq \|f_x^{-1}(x)\|_1 = \max_i \sum_k |g_{ik}^{(0)}|,$$

то система (202) имеет решение  $\{x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n\}$ , которое находится в области

$$\|x - x^{(0)}\|_1 = \max_i |x_i - x_i^{(0)}| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta \quad (\text{B})$$

и может быть получено как предел последовательности

$$x^{(m)} = x^{(m-1)} - f_x^{-1}(x^{(0)}) f(x^{(m-1)}), \quad (\text{C})$$

а быстрота сходимости оценивается неравенством

$$\|x^{(m)} - a\|_1 \leq (1 - \sqrt{1 - 2h}) \|x^{(i)} - a\|_1. \quad (\text{D})$$

Для того чтобы уяснить физический смысл условий этой теоремы, обратимся в первую очередь к неравенству (A) теоремы. Величины, входящие в это неравенство, характеризуют следующие особенности расчетной схемы:

$n$  — число неизвестных;

$\eta$  — ошибка первого приближения;

$M$  — норма матрицы, обратной по отношению к матрице линеаризованной системы уравнений;

$L$  — степень нелинейности системы.

Такое толкование величин, определяющих сходимость процесса последовательных приближений, позволяет сформулировать некоторые практические правила, соблюдение которых ведет к ускорению счета.

Первое из них тривиально и состоит в требовании сокращения числа неизвестных систем. В этом смысле использование системы уравнений метода перемещений (141) со сложной основной системой является более желательным, чем использование развернутой системы (138). Дальнейшее уменьшение числа неизвестных не всегда удается произвести без изменения степени нелинейности системы уравнений, что может повлечь за собой ухудшение оценки  $h$ , за счет увеличения  $L$ .

Второе правило состоит в стремлении уменьшить ошибку первого приближения  $\eta$ , что может быть достигнуто удачным выбором вспомогательной системы. В частности, если из каких-либо соображений (а чаще всего эти соображения существуют) известны приблизительные величины напряжений  $H_b$  в загрузочном состоянии системы, то, выбирая вспомогательную систему, можно использовать эти величины при вычислении  $\bar{E}\bar{F}$ . Кроме уменьшения ошибки первого приближения это существенно уменьшило и оценку  $L$  степени нелинейности системы. Что касается нормы  $M$ , то обычно она гораздо ниже при использовании системы уравнений метода перемеще-

ний по сравнению с системой метода сил, хотя при удачном выборе основной системы метода сил это утверждение становится несправедливым.

## § 30. ВЫБОР ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ РАСЧЕТЕ МАЧТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Исходя из механической интерпретации метода Ньютона—Канторовича, необходимо при расчете мачтовой системы выбрать линейную вспомогательную систему, расчет которой выполняется на каждом этапе итерационного процесса.

Для определенности будем в дальнейшем говорить о системе мачт, объединенных общими оттяжками, по типу представленной на рис. 49, а.

Вспомогательную систему выберем в виде комбинированной стержневой конструкции, аналогичной заданной мачтовой и отличающейся от нее тем, что все оттяжки заменены стержнями с приведенной жесткостью на растяжение-сжатие:

$$\overline{EF}_b = \frac{1}{\frac{1}{EF_b} + \frac{D_b^0}{(H_b^0)^3}}. \quad (204)$$

Вспомогательная система (рис. 49, б) является, в общем случае, многократно статически неопределенной конструкцией, и для ее расчета понадобится привлечь какую-нибудь основную систему. Именно с этим обстоятельством связан выбор термина «вспомогательная система», так как использование более привычного термина «основная система» могло бы привести к недоразумениям.

Расчет вспомогательной системы будем выполнять по методу перемещений с использованием *сложной основной системы*, т. е. основную систему выберем по методу перемещений с положением неполного числа связей (не накладываются связи на углы поворота в узлах). Поскольку мачты считаются практически несжимаемыми, в каждом узле ставятся только горизонтальные связи в двух взаимно перпендикулярных направлениях, соответствующих главным осям инерции ствола мачты, как это показано на рис. 49, в. Нестандартные элементы сложной основной системы метода перемещений — неразрезные

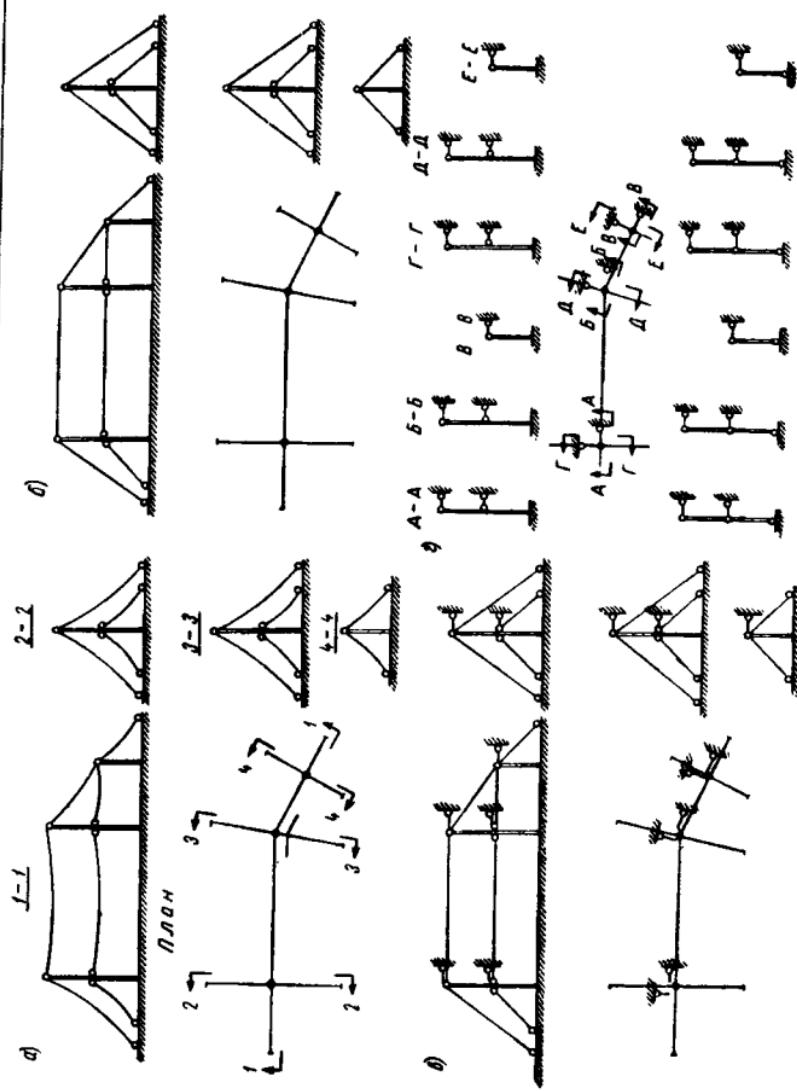


Рис. 49

стволы мачт — изучаются предварительно методом сил (основная система показана на рис. 49, г).

Таким образом, вспомогательными неизвестными являются значения изгибающих моментов  $x_n$  в узлах мачты, а основными — перемещения этих же узлов по направлению дополнительных связей метода перемещений  $w_p$ .

Учитывая то обстоятельство, что в процессе итераций необходимо многократно отыскивать значения неизвестных, удобно искать решение задачи для вспомогательной системы в числах влияния. Зная числа влияния  $k_{pp_1}$ , можно по величинам усилий  $R_{p_1}$  в наложенных связях  $p_1$  основной системы метода перемещений определить смещения связей  $p$  по формуле

$$w_p = \sum_{p_1} k_{pp_1} R_{p_1}. \quad (205)$$

В свою очередь усилия  $R_p$  могут быть вычислены через числа влияния вспомогательных неизвестных  $b_{nn_1}$ , которые определяются из канонической системы уравнений метода сил

$$\sum_{n_1} b_{nn_1}^{\text{V}} \delta_{n_1 n_2}^{\text{V}} + e_{nn_2} = 0 \quad (206)$$

$$(n, n_1, n_2 = 1, 2, \dots, \bar{n}).$$

Здесь  $b_{nn_1}$  — искомые числа влияния;

$$e_{nn_2} = \begin{cases} 0 & (n \neq n_2), \\ 1 & (n = n_2); \end{cases} \quad (207)$$

$$\delta_{n_1 n_2} = \sum_y \frac{l_y}{6EJ_y} [m'_{n_1 y} m'_{y n_2} + m''_{n_1 y} m'_{y n_2} + \\ + (m'_{n_1 y} + m''_{n_1 y}) (m'_{y n_2} + m''_{y n_2})]; \quad (208)$$

$m'_{ny}$ ,  $m''_{ny}$  — моменты соответственно в начале и в конце участков ствола мачты, от единичных значений вспомогательных неизвестных  $x_n$ ;

$l_y$ ,  $EJ_y$  — соответственно длины и изгибные жесткости участков.

Если известны усилия  $n_{np}$  в дополнительных связях  $p$  от воздействия единичных значений вспомогательных неизвестных  $x_n$ , то по формуле

$$-\sum_{n_1} b_{nn_1} n_{n_1 p} = x_{np} \quad (209)$$

можно найти значения неизвестных  $x_{np}$  от единичных узловых смещений по направлениям  $p$ .

Каноническую систему уравнений метода перемещений также будем решать в числах влияния, как уже упоминалось выше. Эта система

$$\sum_p \left( \sum_n x_{np} + \sum_b C_{pb} \frac{EF_b}{L_b} C_{bp_1} \right) k_{pp_2} + e_{p_1 p_2} = 0 \quad (210)$$

$$(p, p_1, p_2 = 1, 2, \dots, \bar{p})$$

или с учетом (209)

$$\sum_p \left( \sum_b C_{pb} \frac{EF_b}{L_b} C_{bp_1} - \sum_{n_1} \sum_n b_{nn_1} n_{n_1 p} n_{pn} \right) k_{pp_2} + e_{p_1 p_2} = 0. \quad (210a)$$

Здесь обозначено:

$C_{pb}$  — усилия в дополнительных связях основной системы от единичных усилий в стержнях, установленных во вспомогательной системе взамен вантовых элементов;

$k_{pp_2}$  — искомые числа влияния;

$$e_{p_1 p_2} = \begin{cases} 0 & (p_1 \neq p_2), \\ 1 & (p_1 = p_2) \end{cases}$$

После определения чисел влияния можно считать законченным подготовительный этап расчета, а именно изучение вспомогательной системы, поскольку узловые смещения  $w_p$  при каждой итерации можно легко получить по формуле (205).

### § 31. СОДЕРЖАНИЕ РАСЧЕТА В ПРОЦЕССЕ ИТЕРАЦИИ

Как уже было сказано выше, на каждом этапе итераций по Ньютону—Канторовичу выбранная вспомогательная система рассчитывается на заданную нагрузку с учетом невязки от предыдущего приближения.

Для начала в первом приближении расчет выполняется лишь для заданной нагрузки. Поскольку мы предполагаем, что подготовительная часть расчета выполнена, т. е. числа влияния  $b_{nn_1}$  и  $k_{pp_1}$  уже известны, то расчет

вспомогательной системы (а целью этого расчета мы считаем определение смещений  $w_p$  и вычисление невязок) можно свести к следующим операциям.

а) Вычисление взаимных углов поворотов  $\theta_n$  на опорах мачт (в разрезной основной системе), для чего можно использовать формулу

$$\theta_n = \sum_y \frac{l_y}{6EJ_y} [m'_{ny} M_y^{*'} + m''_{ny} M_y^{*''} + 2(m'_{ny} + m''_{ny}) M_y^*], \quad (211)$$

где  $M_y^{*''}$ ,  $M_y^{*''}$  и  $M_y^*$  — соответственно моменты в начале, середине и конце участков от заданной нагрузки, приложенной к стволам мачт.

Здесь предполагается, что с достаточной степенью точности можно воспользоваться правилом перемножения эпюр по Симпсону с тремя ординатами.

б) Вычисление опорных моментов  $x_n^*$  от воздействия внешних нагрузок, приложенных к стволам мачт:

$$x_n^* = \sum_{n_1} b_{nn_1} \theta_{n_1}. \quad (212)$$

в) Определение реакций  $R_p''$  в наложенных связях от силовых воздействий:

$$R_p'' = R_p' + \sum_n x_n^* n_{np}, \quad (213)$$

где  $R_p'$  — реакции в наложенных связях, вычисленные для основной системы (разрезные стволы мачт).

г) Определение реакций  $R_p^t$  от температурных воздействий:

$$R_p^{(t)} = \sum_b N_b^{(t)} C_{bp} = \sum_b \alpha (t^0 - t) \frac{\overline{EF_b}}{L_b} \left( L_b + \frac{1}{2} \sum_y B_{by} l_y \right) C_{bp}. \quad (214)$$

В этой формуле:

- а — коэффициент температурного расширения, который принят одинаковым для вантовых и стержневых элементов;
- $t^0$ ,  $t$  — температура соответственно при монтаже и в исследуемом состоянии загружения;
- $B_{by}$  — усилия в участках  $y$  от единичных натяжений вантовых элементов  $b$ .

Множитель  $\frac{1}{2}$  перед последней суммой показывает, что каждому пролету ствола мачты поставлено в соответствие два участка, учитывающих изгиб ствола в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

д) Наконец, определение перемещений

$$\omega_p = \sum_{p_1} k_{pp_1} (R'_{p_1} + R^{(t)}_{p_1}) \quad (215)$$

дает нам информацию о деформированном состоянии вспомогательной системы под воздействием всех заданных нагрузок и температурных перепадов.

Чтобы иметь возможность перейти к следующему циклу расчета, остается лишь определить невязки и скорректировать значения нагрузок.

Как упоминалось в § 28, для вычисления невязок необходимо действительной системе дать деформацию  $\omega_p$  и, кроме того, приложить к ней заданные нагрузки и воздействия. Физически будем представлять себе этот процесс так: действительная система снабжается фиктивными условными связями, поставленными и занумерованными точно так же, как были пронумерованы наложенные связи во вспомогательной системе метода перемещений, и именно этим фиктивным связям сообщаются смещения  $\omega_p$ . Если, кроме того, учтены внешние силовые и температурные воздействия, то именно посредством усилий в фиктивных связях отмечается невязка в основных уравнениях.

Итак, усилия в фиктивных связях, соответствующие некоторой разыскиваемой невязке, будут складываться из активной и реактивной частей

$$R_p = R_p^+ + R_p^- \quad (216)$$

К  $R_p^+$  относятся усилия от заданной нагрузки<sup>1</sup>, а к  $R_p^-$  будем относить усилия, возникающие в системе за счет смещения ее узлов на  $\omega_p$ , вычисляемые по формуле

$$R_p^- = \sum_b C_{pb} H_b + R_p^q, \quad (217)$$

где  $H_b$  — натяжения вантовых элементов (оттяжек мачтовой системы);

---

<sup>1</sup>  $R_p^+ = R_p^{(-)}$ , поскольку обе эти величины совпадают.

$R_p^Q$  — опорный скачок перерезывающих сил в неразрезных стволях мачт.

Предполагаем<sup>1</sup>, что вантовые элементы загружены равномерно распределенными нагрузками  $q_b$ , величины натяжений можно вычислить из уравнения (18), которое преобразуем к виду

$$H_b - \frac{q_b^2 L_b^2 E F_b}{24 H_b^2} = H_b^0 - \frac{q_b^{02} L_b^2 E F_b}{24 H_b^{02}} + a_b + H_b^{(t)}. \quad (218)$$

Здесь

$q_b^0, H_b^0$  — нагрузка и натяжение в исходном (монтажном) состоянии;

$a_b = \sum_p w_p C_{pb} \frac{E F_b}{L_b}$  — усилия в струне, получившей

смещения точек закрепления на величины, соответствующие перемещениям;

$N_b^{(t)} = a(t^\circ - t) \frac{E F_b}{L_b} \left( L_b + \frac{1}{2} \sum_y B_{by} l_y \right)$  — усилия, возникаю-

щие в ванте за счет температурных перемещений.

Таким образом, усилие в фиктивной связи (невязка)

$$R_p = R_p' + \sum_b C_{pb} H_b + R_p^Q. \quad (219)$$

Покажем, что невязки могут быть получены без вычисления  $R_p^Q$ . Для этого предположим, что  $R_p'$  вычисляются не для действительной, а для вспомогательной системы, т. е. именно для вспомогательной системы даны смещения  $w_p$ , и к ней приложены нагрузки  $R_p^k$ , принятые на данном  $k$ -м этапе последовательных приближений. Очевидно, что в этом случае невязок не должно быть (так как мы определили  $w_p$  именно из расчета вспомогательной системы), т. е.

$$R_p^{(k)} + \sum_b C_{pb} a_b + R_p^Q = 0. \quad (220)$$

<sup>1</sup> Это предположение, вообще говоря, может быть опущено, но для большинства конструкций оно является приемлемым, поэтому можно воспользоваться упрощениями, связанными с предположением о таком характере нагрузок на вантах.

Вычитая (220) из (219), получим:

$$R_p = R_p'' - R_p^{(k)} + \sum_b C_{pb} (H_b - a_b). \quad (221)$$

Физический смысл этой формулы состоит в том, что при вычислении невязок мы ограничиваемся рассмотрением лишь тех факторов, которые отличают действительную систему от вспомогательной.

Далее легко перейти к формуле корректировки нагрузок на вспомогательную систему при переходе от  $k$ -го к  $(k+1)$ -му приближению. В соответствии с идеей метода Ньютона—Канторовича на последующем приближении принимается такая нагрузка на вспомогательную систему, которая отличается от нагрузки, принятой в предыдущем приближении, на величину невязки:

$$R_p^{(k+1)} = R_p^{(k)} + R_p \quad (222)$$

или

$$R_p^{(k+1)} = R_p'' + \sum_b C_{pb} (H_b - a_b). \quad (223)$$

Следующий цикл последовательных приближений начинается с расчета вспомогательной системы на новые нагрузки, т. е. с определения  $w_p^{(k+1)} = \sum_{p_1} R_{p_1}^{(k+1)} k_{p_1 p}$ .

## § 32. РАСЧЕТ СИСТЕМЫ МАЧТ ПО ДЕФОРМИРОВАННОЙ СХЕМЕ (ПРИБЛИЖЕННЫЙ ПРИЕМ)

Большинство реальных мачтовых систем обладает достаточно гибкими стволами, работающими на значительные продольные усилия сжатия и воспринимающими, кроме того, еще и поперечные нагрузки. При этом горизонтальные смещения системы могут быть достаточно большими, поскольку для большинства конструкций они ограничиваются не очень жесткой нормой  $1/100$  высоты сооружения. Эти особенности мачтовых систем приводят часто к необходимости выполнения расчета по деформированной схеме (расчета на «устойчивую прочность», по терминологии Н. В. Корноухова). Выполнение такого расчета тем более можно считать естественным, что на всех этапах последовательных приближений все равно определяются смещения всех узлов, т. е. выявляется деформированная схема сооружения.

Как известно, выполнение расчета по деформированной схеме связано с тем, что коэффициенты канонических уравнений метода перемещений вычисляются с учетом влияния нормальных сил в элементах системы. Такой подход приводит к точному решению, мы же попытаемся построить приближенное решение, основанное на некотором упрощающем предположении, а именно, будем считать, что перераспределение усилий в системе за счет работы сжимающих сил на поперечных перемещениях связано лишь с узловыми перемещениями и никак не сказывается на величине углов поворота.

Такое предположение, точность которого будет исследована ниже, эквивалентно допущению о том, что сжато-изогнутые стволы мачт, в смысле расчета их по деформированной схеме, могут быть смоделированы конструкцией, представленной на рис. 50, а,

где сжимающие силы приложены не к стволу мачты, а к некоторой шарнирной кинематической цепи, соединенной со стволом только в оттяжечных узлах<sup>1</sup>.

Рассмотрим, каким образом перераспределяются усилия за счет узловых перемещений. Если закрепить все узлы, а затем сместить некоторый  $i$ -й узел на величину  $w_i$  (рис. 50, б), то нетрудно заметить, что при учете смещения необходимо считаться с горизонтальной составляющей усилий  $\bar{R}_i$  в стволах мачт:

$$\bar{R}_i = S_i \frac{w_i}{l_i} + S_{i+1} \frac{w_i}{l_{i+1}}. \quad (224)$$

<sup>1</sup> Аналогичная модель для сжато-изогнутого стержня предлагалась в [53].

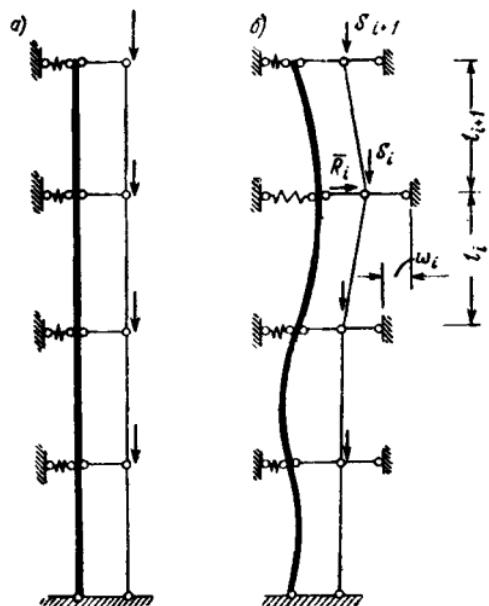


Рис. 50

Переходя к индексной записи, получим:

$$\bar{R}_p = \sum_y \Delta w_y \frac{S_y}{l_y} d_{yp}, \quad (225)$$

где  $d_{yp}$  — усилия от пары единичных сил, приложенных на концах участка (обобщенной силы соответствующей разности смещений концов участка);

$\Delta w_y$  — разность смещений концов участка;

$S_y$  — усилия в участках ствола мачты.

Разность смещений  $\Delta w_y$  можно получить по формуле<sup>1</sup>

$$\Delta w_y = \sum_p (w_p + v_p) d_{py}. \quad (226)$$

Формулой (226) учитывается, что кроме смещений  $w_p$  мачта может иметь смещения  $v_p$  за счет неточностей монтажа. Это обстоятельство является принципиально важным, поскольку учет  $v_p$  гарантирует нас от возможных просчетов, связанных с бифуркациями. Так, если все смещения  $w_p$  лежат в одной плоскости, то не исключена возможность, что расчет по деформированной схеме не выявит тенденций к потере устойчивости в какой-либо другой плоскости. Учет  $v_p$  дает пространственно деформированную схему и в некотором смысле гарантирует нас от подобной ошибки. Правда, можно представить себе и такой случай, когда начальная погиб характеризуется вектором  $v_p$ , строго ортогональным к первому собственному вектору системы; тогда можно получить ошибочные результаты, однако такой случай представляется практически мало вероятным, поскольку в процессе счета ошибки округления приведут к нарушению ортогональности.

Итак, зависимость (225) обнаруживает еще одно воздействие, которое не было учтено при расчете вспомогательной системы и, следовательно, должно быть отмечено при корректировке нагрузки на вспомогательную систему при переходе от  $k$ -го к  $(k+1)$ -му приближению. С учетом величины  $\bar{R}_p$  зависимость (222) приобретает вид:

$$R_p^{k+1} = R_p'' + \bar{R}_p + \sum_b C_{pb} (H_b - a_b). \quad (227)$$

<sup>1</sup> См. § 23, где получена аналогичная зависимость (151).

Здесь же следует отметить, что поскольку величина  $\bar{R}_p$  вычисляется с учетом возможных неточностей монтажа  $v_p$ , то и при подсчете взаимных углов поворота  $\theta_n$  необходимо учесть эти же неточности. При этом формула (211) должна быть скорректирована:

$$\theta_n = \sum_y \frac{l_y}{6EJ_y} [m'_{ny} M_y^* + m''_{ny} M_y^{**} + \\ + 2(m'_n + m''_n) M_y^*] - \sum_p n_{np} v_p. \quad (228)$$

### § 33. СРАВНЕНИЕ ТОЧНЫХ И ПРИБЛИЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ПО ДЕФОРМИРОВАННОЙ СХЕМЕ

Выше предполагалось, что перераспределение усилий, связанное с конечной величиной деформаций и выявляемое в результате расчета по деформированной схеме, происходит только за счет узловых перемещений. Для оценки точности результатов, получаемых при такой расчетной предпосылке, сравним точные и приближенные уравнения для сжато-изогнутого стержня на упругих опорах (рис. 51, а). К такой расчетной схеме обычно приводят стволы большинство авторов [68, 80, 101].

Следует отметить, что эта расчетная схема, вообще говоря, не совсем верна, поскольку опоры ствола, образуемые оттяжками, лишь приближенно можно представлять в виде линейно дефор-

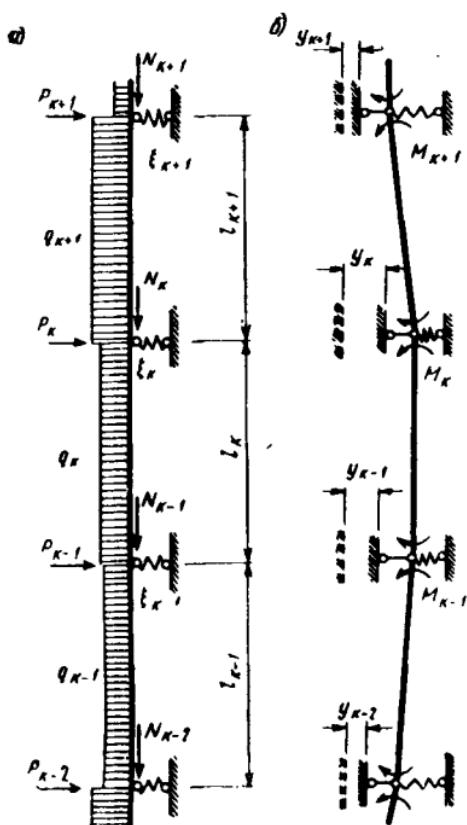


Рис. 51

мирующихся упругих пружин с жесткостью  $\xi$ . Однако для выяснения интересующего нас вопроса о точности предпосылок § 32 линеаризация работы опор, по-видимому, допустима.

Стержни по типу показанного на рис. 51, б рассчитываются обычно смешанным методом, принимая в качестве лишних неизвестных для этой статически неопределенной задачи значения опорных моментов  $M_k$  и осадок упругих опор  $y_k$ . Уравнения для точного расчета такой системы, учитывающие влияние нормальных сил на величины углов поворота оси ствола и изгибающих моментов, получены в [68]:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_k M_{k-1} + (\bar{\beta}_k + \bar{\beta}_{k+1}) M_k + \bar{\alpha}_k M_{k+1} + \\ + \frac{6}{l_k} y_{k-1} + 6 \left( \frac{1}{l_k} + \frac{1}{l_{k+1}} \right) y_k + \frac{6}{l_{k+1}} y_{k+1} = \\ = - \frac{\bar{\Phi}_k}{4} \frac{q_k l_k^2}{4} - \frac{\bar{\Phi}_{k+1}}{4} \frac{q_{k+1} l_{k+1}^2}{4}; \end{aligned} \quad (229)$$

$$\begin{aligned} - \frac{1}{l_k} M_{k-1} + \left( \frac{1}{l_k} + \frac{1}{l_{k+1}} \right) M_k - \frac{1}{l_{k+1}} M_{k+1} + \\ + \frac{N_k}{l_k} y_k + \left( \xi_k - \frac{N_k}{l_k} - \frac{N_{k+1}}{l_{k+1}} \right) y_k + \frac{N_{k+1}}{l_{k+1}} y_{k+1} = P_k. \end{aligned} \quad (230)$$

Здесь  $\bar{\alpha} = \frac{6}{v^2} \left( \frac{v}{\sin v} - 1 \right) \frac{l}{EJ}$ ;

$$\bar{\beta} = \frac{6}{v^2} (1 - \operatorname{ctg} v) \frac{l}{EJ};$$

$$\bar{\Phi} = \frac{24}{v^3} \left( \operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right) \frac{l}{EJ}.$$

Остальные обозначения видны на рис. 51.

Тригонометрические коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varphi$  учитывают влияние нормальной силы на угол поворота оси стержня у опоры, т. е. на величины перемещений по направлению лишних неизвестных  $M_k$ . Эти коэффициенты входят в уравнение (229), которые выражают условие совместности деформаций основной системы — отсутствие перелома упругой линии на опоре. Второе уравнение (230) выражает условие равновесия на  $k$ -й опоре.

В том случае когда принимается модель сжато-изогнутого стержня по рис. 51, а, замен уравнений (229) и (230) получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{l_k}{EJ_k} M_{k-1} + \frac{4l_k}{EJ_k} M_k + \frac{l_{k+1}}{EJ_{k+1}} M_{k+1} + \\ & + \frac{6}{l_k} y_{k-1} - 6 \left( \frac{1}{l_k} + \frac{1}{l_{k+1}} \right) y_k + \frac{6}{l_{k+1}} y_{k+1} = \\ & = - \frac{q_k l_k^3}{4EJ_k} - \frac{q_{k+1} l_{k+1}^3}{4EJ_{k+1}}; \end{aligned} \quad (231)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{l_k} M_{k-1} + \left( \frac{1}{l_k} + \frac{1}{l_{k+1}} \right) M_k - \frac{1}{l_{k+1}} M_{k+1} + \\ & + \frac{N_k}{l_k} y_{k-1} + \left( \xi_k - \frac{N_k}{l_k} - \frac{N_{k+1}}{l_{k+1}} \right) y_k + \\ & + \frac{N_{k+1}}{l_{k+1}} y_{k+1} = P_k. \end{aligned} \quad (232)$$

Нетрудно заметить, что уравнения (230) и (232) совпадают точно, т. е. расчетная модель, показанная на рис. 31, в смысле равновесия узлов точна. Что же касается уравнений (229) и (231), то последнее может считаться частным случаем первого при значениях

$$\bar{\alpha} = \frac{l}{EJ}; \bar{\beta} = \frac{2l}{EJ}; \bar{\Phi} = \frac{l}{EJ}. \quad (233)$$

Анализируя выражения для  $\bar{\alpha}(v)$ ,  $\bar{\beta}(v)$  и  $\bar{\Phi}(v)$ , нетрудно убедиться, что условие (233) выполняется точно при значении  $v=0$ . Это свидетельствует о том, что уравнение (231) не учитывает влияния нормальных сил в стволе на величину углов поворота оси в местах приложения лишних неизвестных  $M_k$ .

В реальных конструкциях, однако, более существенным является точное соблюдение условий равновесия, в чем можно убедиться из сравнения результатов расчета, выполненного для мачты, показанной на рис. 52. Результаты расчета приведены в табл. 3, где для сравнения указан также и результат расчета по недеформированной схеме.

Как видно из этой таблицы, неточное соблюдение условий совместности деформаций дает ошибку в величине опорных моментов, не превышающую 3,5 %, в то время как полное пренебрежение нормальными силами приводит к ошибке, достигающей 11,2 %.

Таблица 3

Сечение	Расчет по формулам (229) и (230)		Расчет по формулам (231) и (232)		Расчет по недеформированной схеме	
	$M, T \cdot m$	$y, m$	$M, T \cdot m$	$y, m$	$M, T \cdot m$	$y, m$
0	0	0	0	0	0	0
1	-101,67	0,169	-98,92	0,167	-90,43	0,179
2	-98,58	0,434	-98,19	0,435	-88,84	0,448
3	-77,60	0,879	-76,69	0,882	-75,08	0,852
4	-133,15	1,299	-134,85	1,318	-134,85	1,229
Максимальная ошибка в %	0	0	3,5	1,0	11,2	9,0

Расчеты мачт, выполненные для тех случаев, когда нагрузки приближаются к критическим значениям, показали, что расчет по формулам (231) и (232) обеспечивает точность результатов (в части узловых моментов и смещений) в пределах  $\pm 5\%$  при значениях сжимающих сил  $N \leq (0,7 \div 0,8) N_{kp}$ . Расчет же без учета нормальных сил в этом случае приводит к ошибкам до 30%.

Пренебрежение влиянием нормальных сил при формулировке условий совместности деформаций, как это было показано выше, обычно мало сказывается на величинах опорных моментов. Этого нельзя сказать о величинах пролетных моментов, которые могут весьма существенно отличаться от вычисленных по формуле

$$M^0 = \frac{q_k l_k^2}{8} + \frac{M_k + M_{k+1}}{2}. \quad (234)$$

Можно получить уточненные значения пролетных моментов и численным методом, для чего следует учесть то обстоятельство, что перераспределение усилий за счет конечной величины смещений связано не только с узловыми смещениями, но и с прогибами ствола мачты между оттяжечными узлами. В этом смысле расчетная модель ствола мачты должна быть несколько видоизменена, а именно, следует увеличить число звеньев в шарнирной цепи, к которой приложена нормальная сила. При этом она окажется присоединенной к стволу мачты не

только в оттяжечных узлах и прогибы пролетных точек также будут вызывать возмущающие («толкающие») силы  $\bar{R}_p$  в связях, соединяющих изогнутый ствол со сжатой шарнирной цепью.

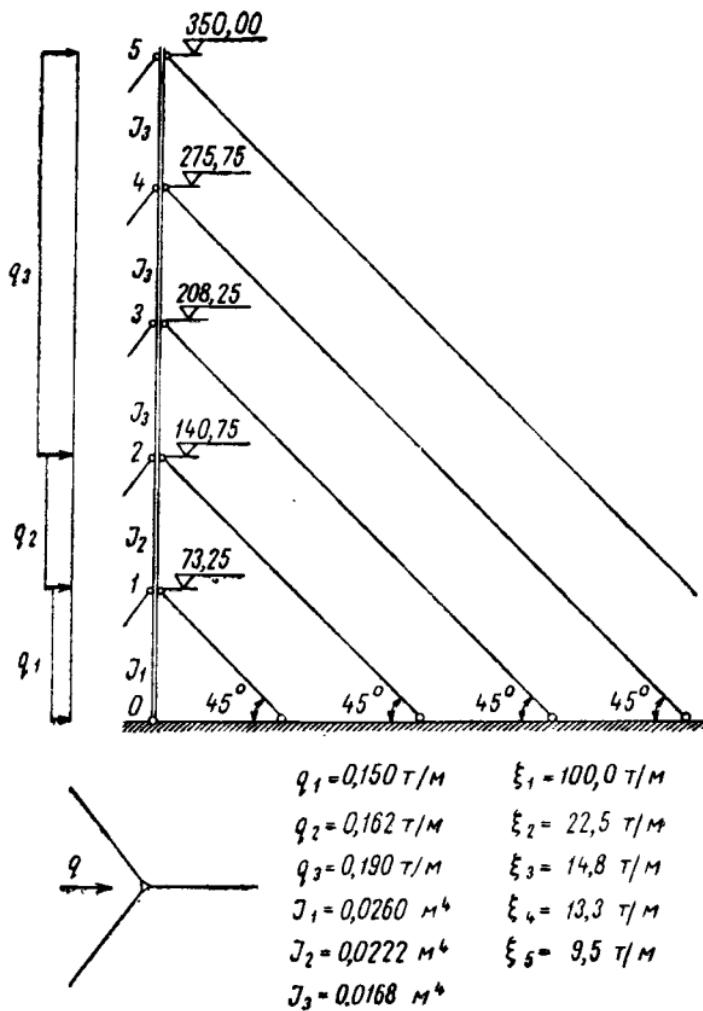


Рис. 52

Такой прием ведет к существенному уточнению решения, поскольку при беспредельном увеличении числа звеньев шарнирной цепи уравнения для расчета модели сжато-изогнутого стержня превращаются в точные.

Докажем это, взяв для примера сжатый стержень, шарнирно опертый по концам. Для него справедливо следующее интегральное уравнение [53]:

$$y(x) = N \int_0^x \frac{\partial K(x, s)}{\partial s} y'(s) ds. \quad (235)$$

Здесь  $y(x)$ ,  $y(s)$  — прогиб оси стержня в точках с абсциссами  $x$  и  $s$ ;

$K(x, s)$  — функция влияния (уравнений линий влияния для прогиба в точке  $x$  от воздействия единичной силы, приложенной в точках с абсциссами  $s$ );

$N$  — сжимающая сила.

Интегральное уравнение (235) в случае перехода к конечному шагу интегрирования должно претерпеть следующие изменения: интеграл следует заменить суммой, а производные — конечноразностными соотношениями.

Тогда можно записать:

$$y_i = N \sum_k \frac{[K(x_i, s_k) - K(x_i, s_{k-1})]}{(\Delta s)^2} (y_k - y_{k-1}) \Delta s. \quad (236)$$

После элементарных преобразований придем к уравнению

$$y_i = N \sum_k \frac{K(x_i, s_k)}{\Delta s} (-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1}) \quad (237)$$

или в индексной записи:

$$y_t = \frac{N}{\Delta s} \sum_{t_1} \sum_{t_2} K_{tt_1} y_{t_1} D_{t_1 t_2}. \quad (238)$$

В том уравнении:

$y_t$  — прогибы стержня в точках  $t$ ;

$K_{tt_1}$  — матрица влияния;

$D_{tt_1}$  — матрица «толкающих усилий», имеющая вид:

$$D_{tt_1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (239)$$

С другой стороны, усилия в связях между шарнирной цепью, к которой приложена сжимающая сила  $N$ , и изогнутым стержнем («толкающих связях») могут быть определены по формуле, аналогичной (225):

$$\bar{R}_t = \sum_y \Delta y_y \frac{N}{\Delta s_y} d_{yt}, \quad (240)$$

где  $\bar{R}_t$  — усилия в толкающей связи для точки  $t$ ;  
 $d_{yt}$  — усилия в связях от обобщенной единичной силы, соответствующей разности смещений концов участка;  
 $\Delta s_y$  — длина участка (звена шарнирной цепи);  
 $\Delta y_y$  — разность смещений концов участка, вычисляемая по формуле

$$\Delta y_y = \sum_t y_t d_{ty}. \quad (241)$$

Подставляя (241) в (240) и учитывая, что длины всех участков равны между собой, т. е.  $\Delta s_y = \Delta s$ , получим:

$$\bar{R}_t = \frac{N}{\Delta s} \sum_y \sum_{t_1} d_{yt_1} y_{t_1} d_{ty}. \quad (242)$$

Поскольку матрица  $d_{yt}$  равна:

$$d_{yt} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & 1 & -1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & & & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad (243)$$

то нетрудно убедиться, что

$$\sum_y d_{ty} d_{yt_1} = D_{tt_1}. \quad (244)$$

Окончательно значения усилий в «толкающих связях» определяются соотношением:

$$\bar{R}_t = \frac{N}{\Delta s} \sum_{t_1} y_{t_1} D_{tt_1}. \quad (245)$$

Для того чтобы определить смещения  $y_t$ , необходимо умножить матрицу усилий  $\bar{R}_t$  на матрицу влияния  $K_{tt_1}$ , при этом мы придем к выражению

$$y_t = \frac{N}{\Delta s} \sum_{t_1} \sum_{t_2} K_{tt_1} D_{t_1 t_2} y_{t_2}, \quad (246)$$

полностью совпадающему с (238), которое получено из точного интегрального уравнения.

Интересно отметить, что идентичность (246) и (238) может быть доказана совершенно формально, если обратиться к дифференцирующим свойствам матрицы инциденций  $\|d_{yt}\|$ .

# Глава 8. ПРИМЕНЕНИЕ ШАГОВОГО МЕТОДА К СТАТИЧЕСКОМУ РАСЧЕТУ И АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ

---

## § 34. О ШАГОВОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Описанные выше итерационные способы решения системы нелинейных алгебраических уравнений сходятся с удовлетворительной скоростью лишь в тех случаях, когда вантово-стержневая система не находится в окрестности критического состояния (в смысле потери устойчивости). Действительно из текста теоремы Л. В. Канторовича (см. § 29) следует, что если детерминант якобиевой матрицы (203) равен нулю (система находится в критическом состоянии), то итерационный процесс расходится. Очевидно, что если система загружена силами, близкими к критическим, то сходимость итерационного процесса будет настолько медленной, что практически получить какие-либо результаты расчета не представится возможным.

Ввиду отмеченного выше, приходится обратиться к методу решения системы нелинейных уравнений, свободному от упомянутого недостатка, поскольку речь идет об исследовании устойчивости или о расчете вантово-стержневых систем по деформированной схеме. В качестве такого метода изберем шаговый метод решения, который применительно к задачам строительной механики развивался в ряде работ [16, 32, 51, 52, 87, 88]. Обычно в применении шагового метода исходили из физических соображений, в связи с чем по существу один и тот же метод получил различные обоснования и наименования у различных авторов («метод многоступенчатого нагружения» [16], «метод последовательных деформаций» [32] и т. п.).

Представляется более правильным начать с описания математической идеи метода [14], а потом раскрыть его механический смысл.

Итак, пусть необходимо решить систему нелинейных уравнений

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (247)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Поставим в соответствие системе (247) систему

$$F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (248)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

причем параметр  $t$  введем таким образом, чтобы при некотором его значении  $t=t^*$  система (248) тождественно совпадала с (247), а при  $t=t^{(0)}$  решение системы (248)

$$x_1 = x_1^{(0)}, x_2 = x_2^{(0)}, \dots, x_n = x_n^{(0)} \quad (249)$$

было известно.

Принимая  $t$  за независимую переменную и считая  $x_1, \dots, x_n$  функциями этой переменной, продифференцируем уравнения (248) по  $t$ . В результате получим систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial F_i}{\partial t} = 0 \quad (250)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

относительно неизвестных  $\frac{dx_i}{dt}$ .

Очевидно, что кривая в  $(n+1)$ -мерном пространстве

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t), \quad (251)$$

определенная системой (248) и проходящая через точку (249), является интегральной кривой системы дифференциальных уравнений (250). А эту интегральную кривую можно построить решая задачу Коши при начальных условиях

$$t = t^{(0)}, \quad x_1 = x_1^{(0)}, \quad x_2 = x_2^{(0)}, \dots, x_n = x_n^{(0)}. \quad (252)$$

Заканчивая построение интегральной кривой при значении  $t=t^*$ , получим решение интересующей нас системы нелинейных уравнений (247).

Что касается способа решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, то здесь могут быть использованы любые численные методы, хорошо разработанные в вычислительной математике [15].

В настоящей работе в качестве численного метода будем применять метод Эйлера. Для этого выберем шаг интегрирования  $\Delta t = \frac{t^* - t^{(0)}}{m}$  ( $m$  — целое число) и будем искать приближенные значения координат интегральной кривой, соответствующие точкам:  $t^{(0)}$ ,  $t^{(0)} + \Delta t$ ,  $t^{(0)} + 2\Delta t$ , ...,  $t^{(0)} + m\Delta t$ .

Если считать шаг  $\Delta t$  достаточно малым, то выражения производных  $\frac{dx_i}{dt}$  в (250) можно заменить соответствующими разностными отношениями  $\frac{\Delta x_i}{\Delta t}$ . Подставляя начальные условия (252) в выражения для коэффициентов и в правые части системы (250), получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)^{(0)} \Delta x_j^{(1)} + \left( \frac{\partial F_i}{\partial t} \right)^{(0)} \Delta t = 0 \quad (253)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

из которой определяются приращения  $\Delta x_i^{(1)}$  на первом шаге интегрирования.

Следующая точка интегральной кривой:

$$t^{(1)} = t^{(0)} + \Delta t, \quad x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \Delta x_1^{(1)},$$

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + \Delta x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)} = x_n^{(0)} + \Delta x_n^{(1)} \quad (254)$$

вновь может быть принята за исходную, что позволяет определить приращения  $\Delta x_i^{(2)}$  на втором шаге и т. д., процесс заканчивается после выполнения  $m$  шагов расчета.

Как видно из вышеизложенного, форма системы дифференциальных уравнений (250) самым существенным образом связана со способом введения параметра дифференцирования  $t$ . Можно, например, воспользоваться одним из двух формальных способов:

$$1) \quad F_t(x_i, t) = x_i - x_i^{(0)} + t [f_i(x_i) - x_i + x_i^{(0)}]; \quad (248a)$$

при этом значению  $t=0$  соответствует решение  $x_i = x_i^{(0)}$ , а при  $t=1$  система (248а) превращается в заданную;

$$2) F_i(x_j, t) = f_i(x_j) + (1-t)f_i(x_j^{(0)}), \quad (248б)$$

причем значению  $t=0$  вновь соответствует решение  $x_i = x_i^{(0)}$ , а тождество  $F_i(x_j, t) \equiv f_i(x_j)$  выполняется при  $t=1$ .

В задачах строительной механики обычно не требуется применять какие-либо искусственные приемы введения параметра  $t$ , поскольку его роль может выполнить параметр интенсивности внешней нагрузки (при этом мы приедем к методам многоступенчатого загружения по типу описанных в работах [16, 52]) либо параметр жесткости системы (здесь мы приедем к методу последовательных деформаций в форме задачи прямого подбора сечений [32]).

Следует отметить, что, варьируя способ введения параметра  $t$ , можно получить содержательную информацию о поведении системы под нагрузкой. Например, если считать, что  $t$  есть параметр интенсивности загружения, т. е.  $t$  входит множителем во все члены уравнений, непосредственно зависящие от внешних воздействий ( $tq_y$ ,  $tR_p^*$ ,  $tS_y^*$  и т. д.), то равномерному увеличению параметра  $t$  соответствует равномерное и пропорциональное увеличение всех нагрузок. В этом случае интегральная кривая (251) описывает поведение обобщенных координат в процессе прямого активного загружения. Можно представить и другие способы введения параметра  $t$ , например, когда при некоторых внешних воздействиях множителем является некоторая функция  $\phi(t)$ , такая, что  $\phi(0)=0$ . Здесь закон загружения системы будет выглядеть более сложно, чем закон простого загружения.

Варьируя способ введения параметра и получая различные интегральные кривые, можно выполнить серию «математических экспериментов» по выявлению поведения конструкции при различных законах загружения. С этой точки зрения шаговый метод можно было бы называть «методом математического моделирования процесса нагружения». Как и в случае экспериментального изучения конструкций, при этом весьма существенную роль играет хорошо продуманная и обоснованная программа «испытаний».

Существенным является и способ выбора начальных условий (252). Так, если воспользоваться уравнениями (248), то в качестве начальных условий может быть выбрано любое равновесное состояние с произвольными координатами  $x_i^{(0)}$ . В этом случае изменению параметра  $t$  от нуля до единицы соответствует процесс перехода из заранее выбранного произвольного равновесного состояния в интересующее нас равновесное состояние при заданных внешних воздействиях. Например, в работе [32] предлагалось переходить от изученного симметричного загружения к несимметричному, преобразуя нагрузку постепенно малыми ступенями, что можно получить и формально, если выбрать соответствующее исходное состояние и ввести параметр  $t$  так, как это сделано в выражении (248).

### § 35. СЛУЧАЙ ПРОСТОГО ЗАГРУЖЕНИЯ МАЧТОВОЙ СИСТЕМЫ

В дальнейшем будем изучать простое загружение мачтовой системы, работа которой описывается системой уравнений (156). Для этой цели члены системы уравнений (156), зависящие явно от нагрузки, представим в виде:

$$tq_y, tR_p^*, tS_y^*, \int (Q_b t)^2 dL_b = t^2 D_b, \quad (255)$$

При  $t=0$  (ненагруженное состояние) справедливы следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} x_n^{(0)} &= 0 (n = 1, 2, \dots, \bar{n}); \quad w_p^{(0)} = 0 \\ &\quad (p = 1, 2, \dots, \bar{p}); \\ H_b^{(0)} &= H_b^0 (b = 1, 2, \dots, \bar{b}); \quad S_y^{(0)} = \sum_b H_b^0 B_{by} \\ &\quad (y = 1, 2, \dots, \bar{y}), \end{aligned} \right\} \quad (256)$$

а при  $t=1$  уравнения приобретают вид (156).

Подстановка (255) в (156) и последующее дифференцирование по  $t$  приводит к системе дифференциальных уравнений, описывающих процесс простого пропорционального нагружения

$$\sum_{n_1} \frac{dx_{n_1}}{dt} \sum_y \frac{l_y}{6EJ_y} [2 (m'_{ny} m'_{yn_1} + m''_{ny} m''_{yn_1}) \alpha (S_y) +$$

$$\begin{aligned}
& + (m'_{ny} m''_{y n_1} + m''_{ny} m'_{y n_1}) \beta(S_y) ] - \sum_p \frac{d \omega_p}{dt} n_{pn} + \\
& + \sum_y \frac{d S_y}{dt} \left\{ \sum_{n_1} \frac{x_{n_1} l_y}{6 E J_y} \left[ 2 (m'_{ny} m'_{y n_1} + m''_{ny} m''_{y n_1}) \frac{d \alpha(S_y)}{d S_y} + \right. \right. \\
& \left. \left. + (m'_{ny} m''_{y n_1} + m''_{ny} m'_{y n_1}) \frac{d \beta(S_y)}{d S_y} \right] + \frac{t q_y l_y^3 D_{y n_1}}{24 E J_y} \cdot \frac{d \Phi(S_y)}{d S_y} \right\} + \\
& + \sum_y \frac{q_y l_y^3 D_{y n}}{24 E J_y} \varphi(S_y) = 0
\end{aligned} \tag{257a}$$

$(n = 1, 2, \dots, \bar{n});$

$$\sum_n \frac{dx_n}{dt} \sum_{p_1} \frac{w_{p_1} d_{p_1 y} d_{y p}}{l_y} + \sum_b \frac{d H_b}{dt} C_{bp} + R_p^* + \sum_y \frac{q_y l_y A_{y p}}{2} = 0$$

$$(p = 1, 2, \dots, \bar{p}); \tag{257б}$$

$$\frac{d S_y}{dt} + \sum_b \frac{d H_b}{dt} B_{by} - S_y^* = 0 \quad (y = 1, 2, \dots, \bar{y}); \tag{257в}$$

$$\sum_p \frac{d \omega_p}{dt} C_{pb} - \left( \frac{L_b}{E F_b} + \frac{t^2 D_b}{H_b^3} \right) \frac{d H_b}{dt} + \frac{t D_b}{H_b^2} = 0$$

$(b = 1, 2, \dots, \bar{b}).$  (257г)

Из группы уравнений (257г) легко получить:

$$\frac{d H_b}{dt} = \sum_p \frac{d \omega_p}{dt} \cdot \frac{C_{pb}}{\frac{L_b}{E F_b} + \frac{t^2 D_b}{H_b^3}} + \frac{t D_b}{H_b^2 \left( \frac{L_b}{E F_b} + \frac{t^2 D_b}{H_b^3} \right)}, \tag{258}$$

а с учетом (258) из уравнений (257в)

$$\begin{aligned}
\frac{d S_y}{dt} = & - \sum_p \frac{d \omega_p}{dt} \sum_b \frac{C_{pb} B_{by}}{\frac{L_b}{E F_b} + \frac{t^2 D_b}{H_b^3}} - \\
& - \sum_b \frac{t D_b B_{by}}{H_b^2 \left( \frac{L_b}{E F_b} + \frac{t^2 D_b}{H_b^3} \right)} + S_y^*. \tag{259}
\end{aligned}$$

Таблица 4

Уравнение	Незвестные										Свободные члены			
	$\Delta x_1^{(i+1)}$	$\Delta x_2^{(i+1)}$	$\dots$	$\Delta x_n^{(i+1)}$	$\dots$	$\Delta x_{n^*}^{(i+1)}$	$\dots$	$\Delta w_1^{(i+1)}$	$\Delta w_2^{(i+1)}$	$\dots$	$\Delta w_{p_1}^{(i+1)}$	$\dots$	$\Delta w_{p^*}^{(i+1)}$	
1	$\delta_{11}^{(i)}$	$\delta_{12}^{(i)}$	$\dots$	$\delta_{1n_1}^{(i)}$	$\dots$	$\delta_{1n^*}^{(i)}$	$\dots$	$\omega_{11}^{(i)}$	$\omega_{12}^{(i)}$	$\dots$	$\omega_{1p_1}^{(i)}$	$\dots$	$\omega_{1p^*}^{(i)}$	$\Omega_1^{(i)}$
2	$\delta_{21}^{(i)}$	$\delta_{22}^{(i)}$	$\dots$	$\delta_{2n_1}^{(i)}$	$\dots$	$\delta_{2n^*}^{(i)}$	$\dots$	$\omega_{21}^{(i)}$	$\omega_{22}^{(i)}$	$\dots$	$\omega_{2p_1}^{(i)}$	$\dots$	$\omega_{2p^*}^{(i)}$	$\Omega_2^{(i)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$\delta_{n1}^{(i)}$	$\delta_{n2}^{(i)}$	$\dots$	$\delta_{nn_1}^{(i)}$	$\dots$	$\delta_{nn^*}^{(i)}$	$\dots$	$\omega_{n1}^{(i)}$	$\omega_{n2}^{(i)}$	$\dots$	$\omega_{np_1}^{(i)}$	$\dots$	$\omega_{np^*}^{(i)}$	$\Omega_n^{(i)}$
$n^*$	$\delta_{n^*1}^{(i)}$	$\delta_{n^*2}^{(i)}$	$\dots$	$\delta_{n^*n_1}^{(i)}$	$\dots$	$\delta_{n^*n^*}^{(i)}$	$\dots$	$\omega_{n^*1}^{(i)}$	$\omega_{n^*2}^{(i)}$	$\dots$	$\omega_{n^*p_1}^{(i)}$	$\dots$	$\omega_{n^*p^*}^{(i)}$	$\Omega_{n^*}^{(i)}$

Числена комбинация методов

Продолжение табл. 4

Уравнение	Неизвестные								Свободные члены				
	$\Delta x_1^{(i+1)}$	$\Delta x_2^{(i+1)}$	$\dots$	$\Delta x_{n_1}^{(i+1)}$	$\dots$	$\Delta x_{n^*}^{(i+1)}$	$\Delta w_1^{(i+1)}$	$\Delta w_2^{(i+1)}$					
1	$\eta_{11}^{(i)}$	$\eta_{12}^{(i)}$	$\dots$	$\eta_{1n_1}^{(i)}$	$\dots$	$\eta_{1n^*}^{(i)}$	$r_{11}^{(i)}$	$r_{12}^{(i)}$	$\dots$	$r_{1p_1}^{(i)}$	$\dots$	$\Delta w_{p_*}^{(i+1)}$	$G_1^{(i)}$
2	$\eta_{21}^{(i)}$	$\eta_{22}^{(i)}$	$\dots$	$\eta_{2n_1}^{(i)}$	$\dots$	$\eta_{2n^*}^{(i)}$	$r_{21}^{(i)}$	$r_{22}^{(i)}$	$\dots$	$r_{2p_1}^{(i)}$	$\dots$	$r_{2p_*}^{(i)}$	$G_2^{(i)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p$	$\eta_{p1}^{(i)}$	$\eta_{p2}^{(i)}$	$\dots$	$\eta_{pn_1}^{(i)}$	$\dots$	$\eta_{pn^*}^{(i)}$	$r_{p1}^{(i)}$	$r_{p2}^{(i)}$	$\dots$	$r_{pp_1}^{(i)}$	$\dots$	$r_{pp_*}^{(i)}$	$G_p^{(i)}$
$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$
$p^*$	$\eta_{p^*1}^{(i)}$	$\eta_{p^*2}^{(i)}$	$\dots$	$\eta_{p^*n_1}^{(i)}$	$\dots$	$\eta_{p^*n^*}^{(i)}$	$r_{p^*1}^{(i)}$	$r_{p^*2}^{(i)}$	$\dots$	$r_{p^*p_1}^{(i)}$	$\dots$	$r_{p^*p_*}^{(i)}$	$G_{p^*}^{(i)}$

УЧЕБНАЯ ПАБЛИКАЦИЯ УЗОРОВ

Заменяя все производные в (257) — (259) соответствующими конечноразностными отношениями и исключая на основании (258) и (259) из уравнений (257а) и (257б) приращения натяжений вант и приращения сжимающих сил в стволях, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно приращений  $\Delta x_n$  и  $\Delta w_p$ . На  $i$ -м шаге интегрирования эта система в табличной форме представлена в табл. 4.

Выражения для коэффициентов при неизвестных в этой системе совпадают с соответствующими коэффициентами уравнения смешанного метода для комбинированной линейной стержневой системы, которая получается из заданной мачтовой конструкции при замене всех вантовых элементов стержнями с приведенной податливостью на растяжение-сжатие:

$$\Pi_b^{(l-1)} = \frac{L_b}{EF_b} + \frac{(t^{(l-1)})^2 D_b}{(H_b^{(l-1)})^3}. \quad (260)$$

В развернутом виде коэффициенты при неизвестных можно записать так:

$$\delta_{nn_1}^{(l)} = \sum_y \frac{l_y}{6EJ_y} [2(m'_{ny} m'_{y n_1} + m''_{ny} m''_{y n_1}) \alpha S_y^{(l-1)} + (m'_{ny} m''_{y n_1} + m''_{ny} m'_{y n_1}) \beta (S_y^{(l-1)})]; \quad (261)$$

$$r_{pp_1}^{(l)} = \sum_b \frac{C_{pb} C_{bp_1}}{\Pi_b^{(l-1)}} + \sum_y d_{py} \frac{S_y^{(l-1)}}{l_y} d_{y p_1} -$$

$$- \sum_y \sum_b d_{yp} \frac{C_{pb} B_{by}}{l_y \Pi_b^{(l-1)}} d_{yb}; \quad (262)$$

$$\omega_{np}^{(l)} = -\eta_{pn}^{(l)} = n_{np}. \quad (263)$$

Свободные члены системы уравнений вычисляются по формулам:

$$\Omega_n^{(l)} = \sum_y \frac{\Delta t q_y l_y^3 D_{yn}}{24EJ_y} \varphi (S_y^{(l-1)}) +$$

$$+ \sum_y \Delta S_y^{(l-1)} \left\{ \sum_{n_1} \frac{x_{n_1}^{(l-1)} l_y}{6EJ_y} \left[ 2(m'_{ny} m'_{y n_1} + \right. \right.$$

$$+ m_{ny}^{'} m_{yn_1}^{''} \frac{d\alpha(S_y^{(l-1)})}{dS_y} + (m_{ny}^{'} m_{yn_1}^{''} + m_{yn}^{''} m_{yn_1}^{'}) \frac{d\beta(S_y^{(l-1)})}{dS_y} \Big] + \\ + \frac{t^{(l-1)} q_y l_y^3 D_{yn_1}}{24EJ_y} \cdot \frac{d\Phi(S_y^{(l-1)})}{dS_y} \Big\}; \quad (264)$$

$$G_p^{(l)} = \Delta t R_p^* + \sum_y \frac{\Delta t q_y l_y A_{yp}}{2} + \sum_b \frac{\Delta t \cdot t^{(l-1)} D_b C_{bp}}{(H_b^{(l-1)})^2 \Pi_b^{(l-1)}} + \\ + \sum_y \sum_{p_1} d_{py} \left[ \frac{\Delta t S_y^*}{l_y} + \sum_b \frac{\Delta t t^{(l-1)} D_b B_{by}}{l_y (H_b^{(l-1)})^2 \Pi_b^{(l-1)}} \right] d_{yp_1}. \quad (265)$$

Составляя выражения свободных членов для упомянутой комбинированной линейной стержневой системы, приходим к формулам, не содержащим членов, подчеркнутых в (264) и (265).

Появление этих добавочных членов связано с тем, что при выводе основных уравнений не постулировались соотношения между сжимающими силами (что обычно можно сделать для большинства рамных систем, являющихся моноциклическими системами по терминологии Н. В. Корноухова [28]) и тем самым не вводились обычные предположения о постоянстве этих соотношений.

В рассматриваемом случае такое предположение было бы ошибочным, поскольку рассматриваются системы полилигические [28, стр. 112], одной из характерных особенностей которых является именно перераспределение сжимающих усилий в процессе нагружения конструкции.

Решая на каждом шаге систему уравнений, представленную в табл. 4, мы получим представление о поведении вантово-стержневой системы в процессе простого загружения, причем точность приближенного решения может быть сделана сколь угодно большой<sup>1</sup>, если уменьшать шаг интегрирования.

В заключение параграфа дадим геометрическое описание шагового метода решения. Наиболее наглядно это можно сделать для системы с одной степенью свободы, у которой кривая состояний равновесия изображается на плоскости в координатах  $tOf$  ( $f$  — обобщенная коорди-

<sup>1</sup> За исключением малых окрестностей околокритических значений параметра нагрузки.

та системы, которая может быть либо внутренним усилием, либо перемещением), а дифференциальное уравнение, описывающее процесс загружения, имеет вид:

$$\varphi(f, t) \frac{df}{dt} - F(f, t) = 0. \quad (266)$$

Пусть  $M^0(f_0, t_0)$  начальная точка интегральной кривой. Из этой точки проведем луч с угловым коэффициентом

$$k_0 = \frac{F(f_0, t_0)}{\varphi(f_0, t_0)}$$

до пересечения его в точке  $M_1$  с прямой  $t_1 = t_0 + \Delta t$ , параллельной оси  $Ot$ . Из точки  $M_1$  проводим луч  $M_1M_2$  с угловым коэффициентом

$$k_1 = \frac{F(f_1, t_1)}{\varphi(f_1, t_1)}$$

до пересечения его со следующей прямой  $t_2 = t_1 + \Delta t$  и т. д. Ломаная  $M_0, M_1, \dots$ , называемая ломаной Эйлера, приближенно заменяет кривую состояний равновесия и приближается к этой кривой с уменьшением шага интегрирования  $\Delta t$ .

Возвращаясь к общему случаю и представляя  $x_n^{(i)}$ ,  $w_p^{(i)}$ ,  $t^{(i)}$  как координаты точек в  $(\bar{n} + \bar{p} + 1)$ -мерном пространстве, можно получить пространственную ломаную, приближенно представляющую пространственную кривую состояний равновесия.

### § 36. УСТОЙЧИВОСТЬ ВАНТОВО-СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ В ПРОЦЕССЕ ЗАГРУЖЕНИЯ. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Для приведенного выше описания шагового метода решения следует, что на каждом шаге возникает необходимость решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n_1} \delta_{nn_1}^{(i)} \Delta x_{n_1}^{(i)} + \sum_{p_1} \omega_{np_1}^{(i)} \Delta w_{p_1}^{(i)} + \Omega_n^{(i)} = 0; \\ \sum_{n_1} \eta_{pn_1}^{(i)} \Delta x_{n_1}^{(i)} + \sum_{p_1} r_{pp_1}^{(i)} \Delta w_{p_1}^{(i)} + G_p^{(i)} = 0 \\ (n = 1, 2, \dots, \bar{n}; p = 1, 2, \dots, \bar{p}). \end{array} \right\} \quad (267)$$

Разумеется, что это можно выполнить лишь в том случае, если определитель системы (267)

$$\Delta^{(l)} = \begin{vmatrix} \delta_{nn_1}^{(l)} & \omega_{np_1}^{(l)} \\ \eta_{pn_1}^{(l)} & r_{pp_1}^{(l)} \end{vmatrix} \quad (268)$$

не равен нулю. Если же на некотором  $j$ -м этапе  $\Delta^{(j)}=0$ , то, как нетрудно убедиться, это свидетельствует о том, что исследуемая вантово-стержневая система находится в критическом (с точки зрения потери устойчивости) состоянии. При этом система (267) не может быть решена, и шаговый процесс срывается на  $j$ -м этапе. Следует отметить, что из практических соображений процесс и не следует продолжать, поскольку конструкция теряет устойчивость при нагрузках

$$j\Delta t q_y; \quad j\Delta t R_p^*; \quad j\Delta t S_y^*; \quad j^2 \Delta t^2 D_b, \quad (269)$$

меньших, чем заданные ( $j < m$ ).

С другой стороны, неравенство нулю определителя (268) и даже его неотрицательность являются условиями, необходимыми, но далеко не достаточными для утверждения об устойчивом характере равновесия. Это условие не гарантирует от «перескока» через ряд критических состояний системы. Условия, необходимые и достаточные для гарантии устойчивости равновесия, включают в себя кроме неравенства  $\Delta^{(l)} \neq 0$  еще и требования о равенстве нулю степени неустойчивости системы  $n_-$  [39] и могут быть получены из основания качественного анализа.

Наконец, следует иметь в виду, что в практических задачах такая ситуация, когда детерминант системы (267) строго равен нулю, является маловероятной по крайней мере в силу двух причин:

а) шаг интегрирования  $\Delta t$  выбирается заранее и трудно предположить, что выбранное наугад число  $t^{(l)} = j\Delta t$  точно совпадет с критическим параметром нагрузки  $t_{kp}$ ;

б) даже если реализуется весьма маловероятное событие  $t^{(l)} = t_{kp}$ , то поскольку речь идет о получении численного результата, например, с помощью ЭЦВМ, ошибки округления, неизбежные при счете, вряд ли дадут возможность заметить, что детерминант  $\Delta^{(l)}$  строго равен нулю.

Более вероятно в практической задаче столкнуться с такой ситуацией, когда определитель системы уравнений

(267) не равен нулю для всех шагов, а система переходит в закритическое состояние в промежутке между двумя узлами интегрирования, соответствующими значениям параметра нагрузки  $t^{(i-1)}$  и  $t^{(i)}$ .

На основании вышеизложенного возникает необходимость контроля качества равновесия на каждом шаге расчета. Такой контроль удобно организовать с привлечением качественных методов исследования [39, 46], позволяющих на каждом этапе определить степень неустойчивости системы.

Не останавливаясь здесь подробно на приемах определения степени неустойчивости, которые освещены ниже, заметим лишь, что если такие приемы разработаны и на каждом этапе можно вычислить степень неустойчивости системы  $u_-$ , то процесс расчета вантово-стержневой системы можно представить в виде чередования следующих операций:

а) составления и решения системы уравнений  $i$ -го этапа нагружения;

б) анализа системы уравнений и определения степени неустойчивости  $u_-$ ;

в) перехода к  $(i+1)$ -му шагу, если оказалось, что степень неустойчивости системы на  $i$ -м шаге равна нулю.

Если же на некотором  $j$ -м шаге  $u_-^{(j)} \neq 0$ , то это свидетельствует о том, что система теряет устойчивость, и продолжать процесс не имеет смысла.

Если на всех этапах расчета, начиная от исходного состояния и кончая полным загрузочным состоянием, степень неустойчивости  $u_- = 0$ , то система находится в состоянии устойчивого равновесия. Однако этот вывод оказывается недостаточным с точки зрения требований норм для расчета, где лимитируется особый коэффициент запаса устойчивости  $k_y = 1,5 \div 2,5$ . Чтобы убедиться в том, что это нормативное требование выполнено, можно продолжить расчет на необходимое число шагов (учитывая, что значению  $t=1$  соответствует данное загрузочное состояние, расчет необходимо вести до значения  $t \geq k_y$ ). Никаких принципиальных трудностей при этом не возникает, и, если с учетом дополнительного числа шагов все время выполняется условие  $u_- = 0$ , то система обладает необходимым запасом устойчивости.

Следует отметить, что с точки зрения фактической работы конструкций такой подход не является безупречным. Действительно, трудно предположить, что степень

возможной перегрузки для всех видов нагрузок одинакова и равна  $k_y$ . Более правильным было бы учесть различный темп роста для нагрузок различной природы, например, считая нагрузки типа ветровой и гололедной, т. е. более изменчивые, растущими с опережением таких нагрузок, как собственный вес конструкций и оборудования. Предполагаемая методика расчета позволяет легко это сделать, для чего необходимо только использовать соответствующий способ введения параметра  $t$ . Более подробное исследование затронутого вопроса лежит за рамками настоящей работы.

## § 37. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ

Как уже упоминалось выше, оценку качества равновесия удобно получать на основании качественных критериев, хорошо разработанных в трудах Р. Р. Матевосяна [39], Я. Л. Нудельмана [46], А. Ф. Смирнова [72] и других исследователей. В настоящей работе будем основываться на понятиях о степени устойчивости и неустойчивости, причем совокупность последовательных коэффициентов устойчивости по предложению Р. Р. Матевосяна будем называть *рядом устойчивости* [39]. Следуя [39], ряд устойчивости используется в неортогональной форме, т. е. для определения степени устойчивости и неустойчивости системы не будем решать характеристическое уравнение и вычислять собственные значения матриц, хотя для некоторых рассуждений будут использованы известные свойства собственных чисел. Мы будем рассматривать качественный анализ систем, описываемых уравнениями смешанного метода. При этом будем предполагать, что система уравнений смешанного метода записана таким образом, что сперва расположены все условия совместности деформаций, а затем все условия равновесия (см. рис. 54).

Поскольку матрица коэффициентов смешанного метода состоит из двух частей, определяемых нелинейными перемещениями метода сил ( $\delta_{nn_1}$  и  $\omega_{np_1}$ ) и реактивными коэффициентами метода перемещений ( $r_{pp_1}$  и  $\eta_{pn_1}$ ), то определение степени неустойчивости заданной системы связано с качественными представлениями о методе перемещений и методе сил.

Что касается метода перемещений, то в монографии [39] весьма подробно исследованы качественные критерии устойчивости как для обычной, так и для сложной основной системы. В частности, на основании этой работы (см. теорему 4 из [39]) можно сформулировать весьма эффективное правило.

**Правило 1.** При фиксированном значении параметра интенсивности внешней нагрузки  $t$  степень неустойчивости  $u^n_{\text{заданной}}$  раз кинематически неопределенной системы равна количеству  $q$  отрицательных и нулевых коэффициентов, расположенных на главной диагонали в преобразованной по Гауссу к треугольному виду матрице реакций метода перемещений, сложенному с числом  $l^n$  критических параметров для элементов основной системы, меньших, чем фиксированное значение  $t$ , т. е.  $u^n_{\text{заданной}} = q + l^n$ .

При практическом использовании правила 1 следует иметь в виду оговорки:

а) хотя рассматриваемая система имеет бесконечное число степеней свободы и, следовательно, при достаточно больших значениях  $t$  степень неустойчивости  $u^n_{\text{заданной}}$  может достигнуть любого наперед заданного значения, правило 1 позволяет определить не более чем  $\tilde{r}$  критических параметров; другими словами, число, определяющее степень неустойчивости в общем случае, не может быть больше порядка матрицы;

б) при формулировке правила 1 предполагалось, что случай ложной основной системы исключен; напомним, что ложной основной системой [72] называется такая основная система, для которой при некотором критическом значении усилий все неизвестные равны нулю; для метода перемещений, в частности, будут равны нулю перемещения по направлению всех поставленных связей;

в) может случиться, что несколько различных элементов основной системы имеют одно и то же значение критического параметра  $t_{\text{кр.эл}}$ ; если  $t_{\text{кр.эл}} < \tilde{t}$ , то при подсчете числа  $l^n$  значение  $t_{\text{кр.эл}}$  засчитывается столько раз, скольким элементам основной системы оно соответствует

Правило 1 и все замечания к нему получены на основании работы [39] и по сути являются лишь перефразировкой полученных Р. Р. Матевосяном результатов, относящихся к качественному анализу уравнений метода перемещений. Что же касается качественных критериев

для уравнений в форме метода сил, то в работах [39, 46, 47] рассматривался лишь тот случай, когда первый критический параметр  $t_{1\text{кр}}$  заданной  $\bar{n}$  раз статически неопределенной системы больше  $\bar{n}$ -го критического параметра  $t_{n\text{кр}}^0$  основной системы. Для более общего случая, т. е. когда условие

$$t_{n\text{кр}}^0 < t_{1\text{кр}} \quad (270)$$

не соблюдается, также можно получить правило для определения степени неустойчивости, для чего следует обратиться к свойствам собственных чисел  $\lambda_i$  матрицы нелинейных перемещений метода сил [40].

Если построить графики изменения характеристических чисел

$$\lambda_i = \lambda_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, \bar{n}) \quad (271)$$

в функции от параметра нагрузки  $t$ , то можно обнаружить (рис. 53), что:

а) до наступления критического состояния заданной системы  $S$  в графиках будет иметь место один или несколько разрывов, причем точки разрывов соответствуют тем значениям  $t_{\text{кр}}^0$ , при которых теряет устойчивость основная система  $S^0$ ;

б) в момент перехода любой из функций (271) через нуль обращается в нуль определитель  $\Delta(t)$  матрицы нелинейных перемещений метода сил [так как  $\Delta(t) = \prod_{i=1}^{\bar{n}} \lambda_i(t)$ ] и, следовательно, теряет устойчивость система  $S$ ;

в) разрывы в графиках всегда таковы, что с ростом  $t$  значение  $\lambda_i$  меняется от  $+\infty$  к  $-\infty$ , а переход через нуль осуществляется от  $\lambda_i < 0$  и  $\lambda_i > 0$ ;

г) предполагается, что число неравенств  $t_{\text{кр.эл}} < \tilde{t}$  равно действительной кратности полюса мероморфной функции  $u_n^0(t)$ . Вообще говоря, это предположение не всегда соблюдается, но поскольку нас будет интересовать только вопрос о нарушении условия  $u_n^0 = 0$ , а истинное значение ненулевой степени неустойчивости нас уже не интересует, то можно не рассматривать случай «ложной кратности полюса» [40, 75].

На основании упомянутых свойств характеристических чисел можно судить о степени неустойчивости заданной системы  $S$ , а именно: степень неустойчивости  $u^c_-$  равна разности между числом  $l^c$  критических значений параметра  $t_{kp}^0$ , меньших заданного значения  $\tilde{t}$ , и количеством отрицательных характеристических чисел  $p$ , соответствующих заданному значению параметра  $\tilde{t}$ , т. е.  $u^c_- = l^c - p$ .

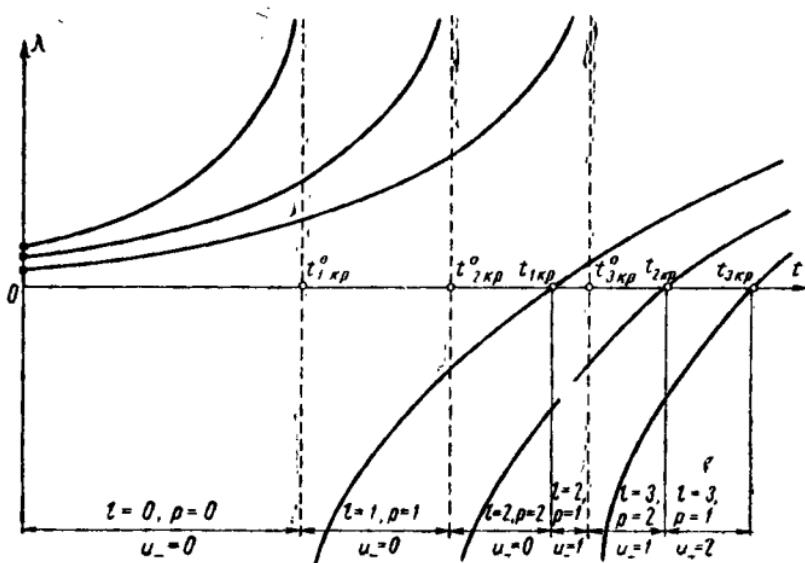


Рис. 53

Действительно, каждый разрыв в одном из графиков  $\lambda_i(t)$  на основании свойства «в» увеличивает на единицу и число  $l^c$ , и число  $p$  (т. е. не меняет степени неустойчивости  $u^c_-$  заданной системы), в то время как переход через нуль какого-либо из  $\lambda_i(t)$  ведет к уменьшению на единицу количества отрицательных характеристических чисел  $p$ , т. е. на единицу возрастает степень неустойчивости  $u^c_-$ .

Важно отметить, что практический качественный анализ детерминанта нелинейных перемещений можно выполнить и не вычисляя характеристические числа  $\lambda_i$ , если, как это предложено в [39], воспользоваться неортогональным рядом устойчивости Пуанкаре, и в частности

оценивать число  $r$  количеством отрицательных коэффициентов, расположенных на главной диагонали в преобразованной по Гауссу к треугольному виду матрице нелинейных перемещений метода сил.

Отсюда следует простое правило.

**Правило 2.** При фиксированном значении параметра интенсивности внешней нагрузки  $t$  степень неустойчивости заданной  $\bar{t}$  раз статически неопределенной системы равна разности между числом критических параметров основной системы, меньших заданного значения  $t^c$ , и числом  $r$  отрицательных и нулевых коэффициентов, расположенных на главной диагонали в преобразованной по Гауссу к треугольному виду матрице перемещений метода сил.

Относительно правила можно высказать замечания, аналогичные приведенным выше:

а) число, определяющее степень неустойчивости, не может быть больше порядка матрицы метода сил;

б) предполагается, что выбранная основная система не является ложной;

в) при совпадающих для разных элементов значениях  $t_{\text{кр.эл}}$  необходимо учитывать их в количестве, равном числу элементов, которым соответствует  $t_{\text{кр.эл}} < \tilde{t}$ .

Следует заметить, что с практической точки зрения эти замечания не являются обременительными. Действительно, нас редко интересуют критические значения параметра внешней нагрузки, имеющие номер выше первого, в то же время порядок матриц, которыми оперируют в расчетах, достаточно высок, так что возможности, представляемые правилами 1 и 2, по существу не используются. Что касается замечания о ложной основной системе, то здесь следует иметь в виду два обстоятельства: во-первых, ложная основная система встречается достаточно редко, а во-вторых, нулевые значения неизвестных, которыми характеризуется ложная основная система, как правило, могут встретиться в том случае, когда рассматривается загружение чисто «параметрической нагрузкой» по терминологии А. Р. Ржаницына. В практических же задачах мы обычно сталкиваемся с загружением как параметрической, так и активной нагрузкой, поэтому и второе замечание нельзя отнести к категории обременительных.

Для того чтобы получить необходимое нам правило

для качественного анализа уравнений смешанного метода, необходимо учесть, что степень неустойчивости системы равна сумме степеней неустойчивости ее частей. Так, если система является  $\bar{p}$  раз статически неопределенной и  $\bar{r}$  раз кинематически неопределенной, причем фиксированный параметр  $t$  больше, чем  $l$  критических значений параметра нагрузки для простейших составных элементов основной системы, а в преобразованной по Гауссу к треугольному виду матрице коэффициентов системы уравнений смешанного метода обнаружено  $r$  отрицательных чисел среди первых  $\bar{p}$  диагональных элементов и  $q$  отрицательных чисел среди  $\bar{r}$  последующих диагональных элементов<sup>1</sup>, то степень неустойчивости и см равна:

$$u_{\text{см}}^{\text{см}} = u_{\text{см}}^{\text{с}} + u_{\text{см}}^{\text{п}} = l - p + q. \quad (272)$$

Это и есть правило для определения степени неустойчивости системы при анализе ее смешанным методом. Использование этого правила тем более естественно, что на каждом шаге при решении системы линейных алгебраических уравнений все равно выполняется преобразование матрицы коэффициентов к треугольному виду (прямой ход по Гауссу) и, следовательно, определение чисел  $p$  и  $q$  не связано ни с какими дополнительными вычислениями. Что касается количества  $l$  критических параметров для элементов основной системы смешанного метода, меньших заданного параметра интенсивности внешней нагрузки, то и это число подсчитывается очень просто. Действительно, основная система состоит из простейших элементов — стержней с шарнирно опертыми концами. Сравнивая ряд из критических сил для участков ствола

$$S_y^{\text{кр}} = \frac{n^2 \pi^2 E J_y}{l_y^2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

расположенных в порядке возрастания модулей  $S_y^{\text{кр}}$ , с величинами  $S_y^{(l)}$  усилий в участках, можно легко определить число неравенств

<sup>1</sup> Напомним, что в (267) сперва выписаны все уравнения совместности (условия метода сил), а затем все уравнения равновесия (условия метода перемещений).

$$S_y^{(l)} > S_y^{\text{кр}}, \quad (273)$$

которое и равно величине  $l$ .

### § 38. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПОВОДУ КАЧЕСТВЕННОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ

Полученные выше правила для вычисления степени неустойчивости системы, вообще говоря, относятся к линейным алгебраическим уравнениям некоторого  $i$ -го этапа расчета. Эти расчеты, как уже упоминалось, описывают поведение некоторой комбинированной стержневой системы со стержнями, обладающими податливостью (260) и заменяющими вантовые элементы. В связи с этим может возникнуть вопрос о том, в какой мере устойчивость или неустойчивость такой линейной системы может характеризовать качество равновесия заданной нелинейной вантово-стержневой системы.

Нетрудно заметить, что уравнения, записанные в табл. 4, имеют те же коэффициенты, что и уравнения в вариациях (165), полученные для произвольной нелинейной вантово-стержневой конструкции. Действительно, система линейных алгебраических уравнений (267) получена путем линеаризации исходных нелинейных соотношений, причем линеаризация выполнена в окрестности некоторого загрузочного состояния, характеризуемого значением параметра интенсивности внешней нагрузки  $t$ . Если считать, что исходные нелинейные уравнения относятся к невозмущенному состоянию системы, то линейные уравнения (267) описывают поведение системы при малых возмущениях  $\Delta x_n$  и  $\Delta \omega_p$  обобщенных координат, т. е. являются уравнениями в вариациях.

Если воспользоваться известной теоремой А. М. Ляпунова [38] об устойчивости по первому приближению, то можно сделать вывод об устойчивости невозмущенного состояния нелинейной системы, если устойчивы состояния, описываемые линеаризованными уравнениями в вариациях. Такой вывод вполне закончен и правомерен для малых окрестностей тех точек, которые характеризуются значениями параметра интенсивности внешней нагрузки:

$$t^{(0)}, t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(i)}, t^{(i+1)}, \dots, t^{(m)}. \quad (274)$$

Однако распространять этот вывод на весь промежуток между узлами интегрирования  $t^{(i)}$  и  $t^{(i+1)}$  в общем

случае нельзя. Это положение можно наглядно проиллюстрировать, если обратиться к известному геометрическому истолкованию тех расчетных операций, которые выполняются при решении задачи Коши методом Эйлера (см. § 35).

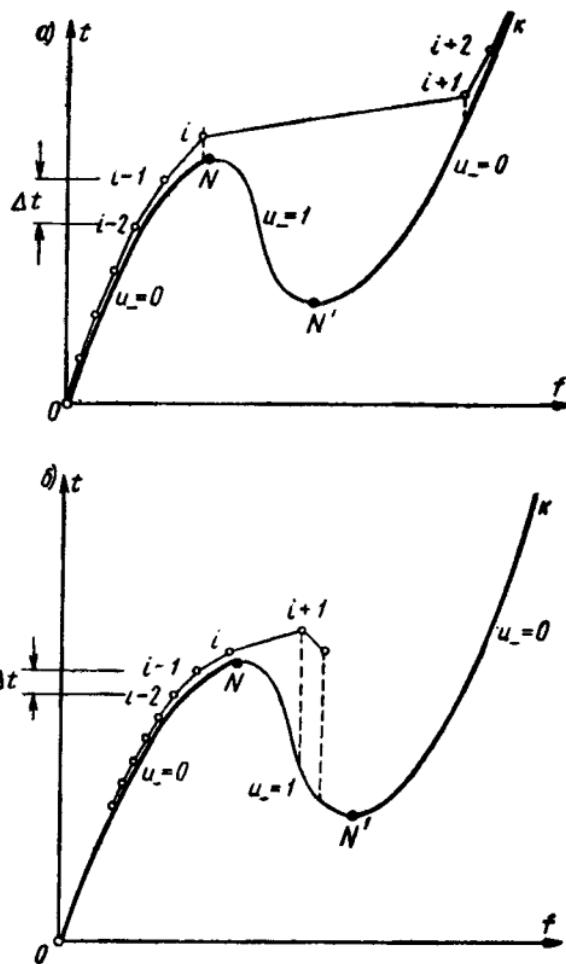


Рис. 54

Пусть, например, кривая состояний равновесия имеет предельную точку  $N$  (рис. 54, а), где устойчивая ветвь  $ON$  (степень неустойчивости  $u_- = 0$ ) сопрягается с неустойчивой ветвью  $NN'$  (степень неустойчивости  $u_+ = 1$ ). В точке  $N'$  вновь происходит обмен устойчивостью, и ветвь  $N'K$  характеризуется значением  $u_- = 0$ . Нетрудно заметить, что ломаная Эйлера «проскаакивает» мимо не-

устойчивой ветви  $NN'$ , а качественные критерии укажут на устойчивый характер равновесия как при  $i$ -м, так и при  $(i+1)$ -м шаге, в то время как между этими узлами интегрирования находится отрезок кривой состояний равновесия с неустойчивыми решениями.

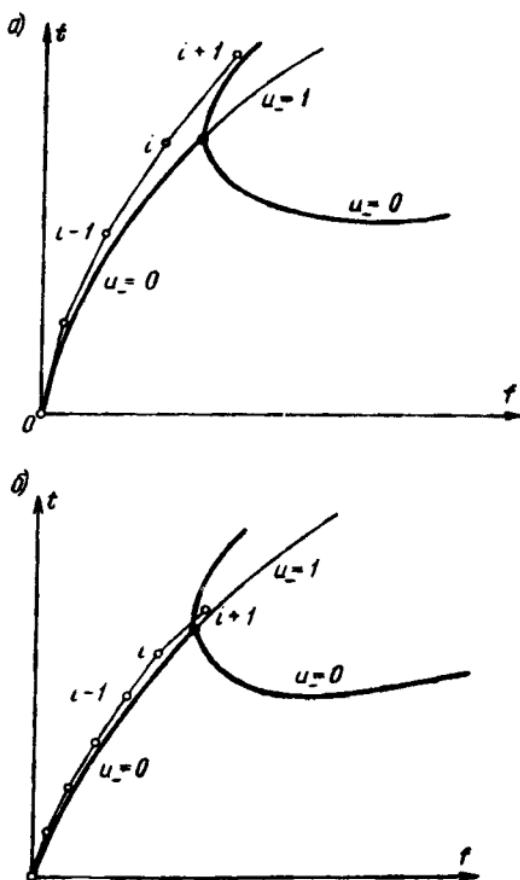


Рис. 55

Может создаться впечатление, что такое явление связано со специфическими свойствами предельной точки, но нетрудно построить пример и для случая потери устойчивости в виде точки бифуркаций (рис. 55, a), где также два смежных узла интегрирования лежат вблизи устойчивых ветвей кривой состояний равновесия, а в промежутке между ними система теряет устойчивость.

Приведенные выше примеры не должны давать основание к слишком пессимистическим выводам, поскольку,

во-первых, с уменьшением шага интегрирования  $\Delta t$  уменьшается вероятность описанных выше случаев (рис. 54, б и 55, б), а во-вторых, потому, что эти случаи связаны с такими вариантами формы кривой состояний равновесия, когда устойчивая ветвь послекритических состояний расположена близко от первоначальной (до-критической) ветви. Второе обстоятельство важно с практической точки зрения, поскольку с точки зрения работоспособности конструкции сам факт перехода через предельную точку или точку бифуркации еще не является определяющим, если только при этом смещения или внутренние усилия не выходят из области допустимых. Поэтому возможность появления «незамеченных» случаев потери устойчивости, по типу представленных на рис. 54 и 55, не представляет собой большой опасности.

Можно указать достаточно простой прием проверки, который в некотором смысле гарантирует от недооценки таких «скрытых» форм потери устойчивости.

Этот прием заключается в двойном интегрировании системы дифференциальных уравнений в том смысле, что кроме процесса нагружения (прямое интегрирование) исследуется и процесс разгрузки (обратное интегрирование). При этом кривая состояний равновесия (точнее ломаная Эйлера, приближенно заменяющая эту кривую) образует характерную петлю, если потеря устойчивости связана с переходом через предельную точку. Интересно отметить, что и само определение нижней критической нагрузки в последнее время стараются связать с исследованием процесса разгрузки<sup>1</sup>.

Естественно, что в результате двойного интегрирования, т. е. после окончания цикла «нагрузка — разгрузка», мы не придем точно к исходному состоянию системы (256). Степень нарушения зависимости (256) характеризует точность решения задачи, поэтому можно рекомендовать метод двойного интегрирования не только для выявления «скрытых» форм потери устойчивости, но и для контроля точности решения. В том случае когда точность решения оказывается недостаточной, необходимо повторить расчет с большим числом шагов.

<sup>1</sup> А. С. Вольмир, например, пишет: «Будем уменьшать параметр нагрузки  $\lambda$  и следить за характером решений, определяющих вторичные состояния. То значение параметра  $\lambda$ , при котором вторичные состояния тела перестают быть устойчивыми, назовем нижним критическим значением  $\lambda_n$ » [8, стр. 830].

# Глава 9. ИСКУССТВЕННОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ УСИЛИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ ВАНТОВО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

---

## § 39. ЦЕЛИ И СПОСОБЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ УСИЛИЙ

Известно, что искусственное регулирование усилий в конструкциях приводит к существенному уменьшению расхода материалов и снижению стоимости инженерных сооружений [2, 35]. Применительно к системам, рассматриваемым в настоящей работе, искусственное регулирование усилий выполняется чаще всего для достижения следующих целей:

1) увеличения натяжения вантовых элементов с целью создания возможности воспринимать скимающие усилия;

2) увеличения натяжения для повышения приведенной жесткости вантовых элементов (см. рис. 26);

3) перераспределения внутренних усилий, например изменения эпюры моментов в изгибаемых элементах системы.

Способы создания предварительного напряжения в системе достаточно разнообразны, однако их можно разбить на две принципиально различающиеся друг от друга группы.

1. Создание предварительного напряжения, сохраняющегося в ненагруженном состоянии за счет самонапряжений, возможных в статически неопределенной системе. В этом случае самонапряжение создается либо путем регулировки длин, углов поворота, положений опор и т. п., либо за счет временных пригрузок различных элементов несобранной еще системы и замыкания ее под нагрузкой (временный пригруз после замыкания системы, как правило, удаляется).

2. Создание предварительного натяжения путем включения в систему некоторой постоянной нагрузки (чаще всего собственного веса конструкции или специального

балласта). В этом случае, строго говоря, нельзя считать, что рассматривается самонапряженное состояние системы, поскольку речь идет об усилиях, вызванных внешней нагрузкой, хотя ее постоянный характер и дает возможность достичь эффекта, аналогичного эффекту самонапряжения.

Ниже мы рассмотрим, какие существуют теоретические возможности регулирования усилий, а пока лишь отметим, что создание предварительного напряжения путем использования приемов первой группы возможно только для статически неопределеных систем, в то время как приемы второй группы могут применяться для любых систем. Правда, последние часто обладают тем недостатком, что кроме положительного эффекта приходится мириться с нежелательной перегрузкой, создаваемой системой балластных грузов, однако область их распространения существует и, по-видимому, не сужается в последнее время.

## § 40. ЛИНЕЙНО-НЕЗАВИСИМЫЕ САМОНАПРЯЖЕНИЯ

Ранее (см. § 11) отмечалось, что в статически неопределенной геометрически неизменяемой системе может существовать ровно столько линейно-независимых, произвольных самонапряженных состояний, какова степень статической неопределенности системы. Отсюда нетрудно сделать вывод о том, что в  $n$  раз статически неопределенной системе существует не менее  $n$  элементов ( $n$  связей), усилия в которых могут быть при помощи самонапряжений сделаны равными любому наперед заданному числу.

Нетрудно доказать, что эти связи в отмеченном количестве существуют (например, это могут быть те связи, которые удаляются из заданной статически неопределенной системы при выборе основной системы метода сил), нетрудно также указать и на то, что могут существовать элементы, где никаким подбором самонапряженных состояний нельзя изменить усилие (например, момент в шарнире всегда равен нулю независимо от величин самонапряжений). Отсюда возникает вопрос об отыскании тех связей, усилия в которых поддаются искусственному регулированию при помощи самонапряжений.

Для того чтобы выделить эти связи, обратимся к формулам типа (91) — (93). Усилия  $S_i$  в связях  $i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) для  $\bar{n}$  раз статически неопределенной системы могут быть представлены в виде:

$$S_i = S_i^0 + S_i^* + \sum_n s_{in} x_n, \quad (275)$$

при этом в ненагруженном самонапряженном состоянии

$$S_i^0 = \sum_n s_{in} x_n^0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (276)$$

Здесь обозначено:

$S_i^0$  — усилия самонапряжения;

$S_i^*$  — усилия в основной системе метода сил от воздействия заданных нагрузок;

$x_n$  — значения лишних неизвестных метода сил в заданном нагруженном состоянии;

$x_n^0$  — значения лишних неизвестных метода сил в ненагруженном самонапряженном состоянии (при создании предварительного напряжения).

Рассмотрим матрицу  $\|s_{in}\|$ , ранг которой не может быть меньше  $\bar{n}$ , так как в противном случае наше предположение о том, что рассматриваемая система  $\bar{n}$  раз статически неопределенна, оказалось бы ошибочным. Если из этой матрицы выделить любой ненулевой минор порядка  $\bar{n}$  и рассмотреть систему линейных уравнений

$$\sum_n s_{i_k n} \bar{x}_n^0 = \bar{S}_{i_k}^0, \quad (277)$$

где индекс  $i_k$  соответствует тем значениям  $i$ , которые вошли в выбранный минор, а значения  $\bar{S}_{i_k}^0$  произвольны, то нетрудно заметить, что система (277) единственным образом определяет значения  $\bar{x}_n^0$  ( $n=1, 2, \dots, \bar{n}$ ).

Следовательно, в связях  $i_k$ , для которых соответствующие  $s_{i_k n}$  образуют ненулевой минор порядка  $\bar{n}$ , могут быть созданы любые наперед заданные значения усилий предварительного напряжения. В остальных связях усилия предварительного напряжения получаются равными:

$$S_i^0 = \sum_n s_{in} \bar{x}_n^0, \quad (278)$$

причем для тех номеров  $i$ , для которых оказалось бы  $s_{in}=0$  ( $n=1, 2, \dots, \bar{n}$ ), всегда будет  $S_i \equiv 0$ .

Последние связи, в которых вообще невозможно создать предварительное напряжение, относятся к безусловно необходимым [60].

Все сказанное выше может быть резюмировано в виде следующей теоремы.

**Теорема 13.** В геометрически неизменяемой  $\bar{p}$  раз статически неопределенной системе можно путем создания предварительного напряжения в незагруженной системе добиться того, что усилия в  $\bar{p}$  связях, не относящихся к числу безусловно необходимых, будут равны произвольной наперед заданной величине.

При доказательстве этой теоремы мы использовали только тот факт, что система самонапряжений линейно независима и произвольна, следовательно, теорема не обязательно относится к обычным линейным стержневым системам. Область ее действия — произвольные конструкции, для которых условия равновесия записываются по отношению к недеформированной схеме, а внутренние усилия не ограничены никакими условиями.

Что касается вантово-стержневых систем, то первое условие здесь обычно соблюдается, а второе нет, так как для вантовых элементов существуют ограничения — неравенства типа  $H_b \geq 0$  и  $H_b^0 \geq 0$  ( $b=1, 2, \dots, \bar{b}$ ).

Выше уже отмечалось (см. § 9), что могут существовать статически неопределенные системы с элементами, воспринимающими усилия лишь одного знака, не допускающие ни одного самонапряженного состояния. Таким образом, только на основании признака статической неопределенности нельзя считать, что в системе возможно искусственное регулирование усилий по первому способу.

Возникает естественный вопрос о признаках, по которым можно распознать такие «вырожденные» системы. Мы этот вопрос перефразируем так. Какое число линейно независимых самонапряженных состояний допускает заданная вантово-стержневая система?

Прежде чем ответить на поставленный вопрос, выясним, чем определяется сам факт несовпадения количества возможных независимых самонапряжений и степени статической неопределенности. Лучше всего это разобрать на примере (рис. 56, а). Выбирая для этой дважды статически неопределенной схемы основную систему

так, как это указано на рис. 56, б, в, запишем значения усилий в опорных стержнях при нулевой внешней нагрузке:

$$S_1 = \frac{2}{a} x_1 - \frac{1}{a} x_2;$$

$$S_2 = -\frac{1}{a} x_1 + \frac{2}{a} x_2;$$

$$S_3 = -\frac{1}{a} x_2.$$

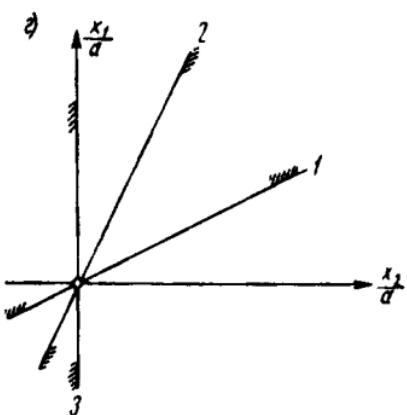
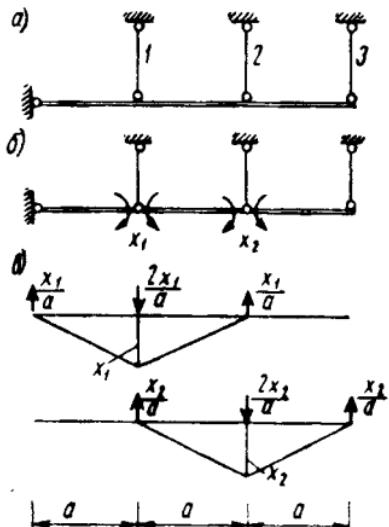


Рис. 56

Нетрудно заметить, что если потребовать чтобы  $S_1 \geq 0$ ,  $S_2 \geq 0$  и  $S_3 \geq 0$  (например, все опорные стержни представляют собой вантовые подвески), то система линейных неравенств

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{a} x_1 - \frac{1}{a} x_2 &\geq 0; \\ -\frac{1}{a} x_1 + \frac{2}{a} x_2 &\geq 0; \\ -\frac{1}{a} x_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (279)$$

может быть удовлетворена только значениями  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 0$  (см. рис. 57, г), при этом точка  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  удовлетворяет ограничениям (279) как точным равенст-

вам. Такие ограничения в теории линейных неравенств именуются *жесткими* [92].

В теории линейных неравенств [92] известна следующая теорема.

**Теорема 14.** *Размерность  $\rho$  многогранного множества  $\Omega$ , определяемого системой линейных неравенств*

$$H_b^0 + H_b^* + \sum_n h_{bn}x_n \geq 0, \quad (280)$$

*вычисляется по формуле*

$$\rho = \bar{n} - \sigma, \quad (281)$$

где  $\bar{n}$  — число переменных;  $\sigma$  — ранг матрицы, составленной из коэффициентов, относящихся к жестким ограничениям.

Таким образом, число независимых самонапряжений для вантово-стержневых систем только тогда равно степени статической неопределенности, когда на знаки усилий в вантовых элементах нет жестких ограничений.

Второе отличие вантово-стержневых систем от рассмотренных в начале этого параграфа состоит в том, что величины  $x_n^0$  ( $n=1, 2, \dots, \bar{n}-\sigma$ ) не являются произвольными. Эти величины должны относиться к множеству  $\Omega^0$ , определяемому системой неравенств

$$\sum_n h_{bn}x_n^0 \geq 0 \quad (b = 1, 2, \dots, \bar{b}). \quad (282)$$

Таким образом, можно резюмировать, что для вантово-стержневых систем возможности создания самонапряженных состояний ограничены по сравнению с системами, допускающими усилия произвольного знака.

## § 41. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ СОЗДАНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

На рис. 57, а изображена схема вантовой конструкции [25, 35], предназначенная для восприятия постоянной равномерно распределенной нагрузки  $P=5 \text{ т/м}$  и временной равномерно распределенной нагрузки  $q=2 \text{ т/м}$ . Кроме того, следует считаться с возможностью изменения температуры в диапазоне  $\pm t^\circ$ . На рис. 57, б показана огибающая эпюра моментов в балке жесткости: нижняя кривая относится к полному загружению системы и од-

новременному повышению температуры, а верхняя — к загружению только постоянной нагрузкой при сниженной температуре.

Нетрудно заметить, что путем наложения самонапряженного состояния, для которого эпюра моментов в бал-

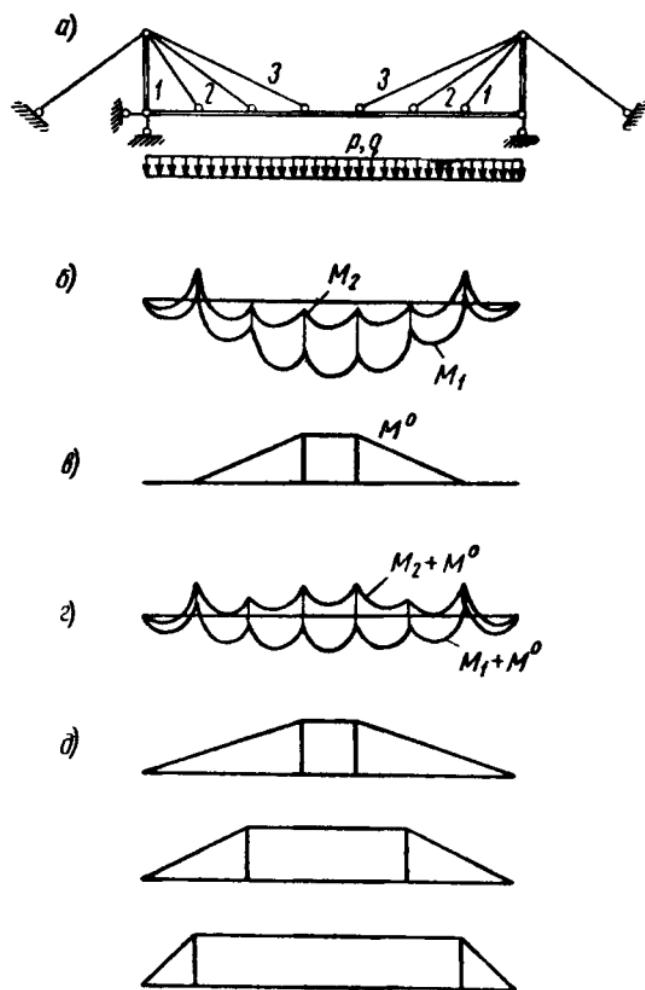


Рис. 57

ке жесткости указана на рис. 57, в, можно существенно улучшить огибающую эпюру моментов (см. рис. 62, г), снизив значения расчетных моментов более чем вдвое. При этом в самонапряженном состоянии усилия в вантовых элементах должны быть равны:  $H_1^0 = -31 \text{ T}$ ;  $H_2^0 =$

$=0$ ;  $H_3^0 = 75 T$ . Такое самонапряжение нельзя создать в ненагруженном состоянии, так как первый вантовый элемент оказался сжатым. Если же регулирование усилий выполнять при нагружении постоянной нагрузкой, то можно добиться указанной на рис. 57,  $\varepsilon$ , огибающей эпюры моментов, поскольку с учетом действий постоянной нагрузки  $H_1 = 362 T$ ;  $H_2 = 494 T$ ;  $H_3 = 848 T$  (до регулирования было  $H_1 = 393 T$ ;  $H_2 = 494 T$ ;  $H_3 = 773 T$ ). Что касается регулирования усилий в ненагруженном состоянии, то условия  $H_b^{(0)} \geq 0$  дают возможность распорядить-

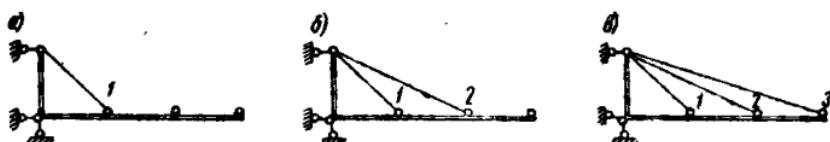


Рис. 58

ся только одной из указанных на рис. 57,  $\delta$  эпюр, что снижает возможность активного вмешательства проектировщика в «игру сил».

Приведенный выше пример является характерным, он наглядно указывает на то обстоятельство, что последовательность нагрузок и искусственного регулирования усилий небезразлична для вантово-стержневых систем.

Можно привести примеры и для тех случаев, когда искусственное регулирование выгодно делать многократно — первый раз в ненагруженном состоянии, а потом в несколько этапов по мере нагружения постоянными нагрузками.

Интересно остановиться и на другом вопросе, тесно связанном с поэтапным предварительным напряжением, а именно на вопросе о влиянии предварительного напряжения, создаваемого в некотором монтируемом элементе, на величины предварительного напряжения в элементах, установленных ранее [85].

Пусть, например, для системы, представленной на рис. 58, из условий оптимального распределения моментов в балке жесткости определены усилия предварительного натяжения  $H_1^0$ ,  $H_2^0$ ,  $H_3^0$ . Если установка и натяжение вант ведутся в такой последовательности, как это представлено на рис. 58,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , то необходимо считаться с принятым способом производства при подсчете усилий,

которыми необходимо натянуть ванты в процессе монтажа системы.

Пусть первая ванта установлена с натяжением  $H_1^{0(1)}$ . При установке второй ванты, которая натягивается силой  $H_2^{0(2)}$ , в первой ванте усилие станет равным:

$$H_1^{0(2)} = H_1^{0(1)} + \bar{h}_{12}^{(1)} H_2^{0(2)}, \quad (283)$$

где  $\bar{h}_{12}^{(1)}$  — усилие в первой ванте от воздействия единичного натяжения второй ванты, вычисленное для однократно статически неопределенной системы, представленной на рис. 62, в.

При установке третьей ванты, которая натягивается силой  $H_3^{0(3)}$ , в первой ванте усилие станет равным:

$$H_1^{0(3)} = H_1^{0(1)} + \bar{h}_{12}^{(1)} H_2^{0(2)} + \bar{h}_{13}^{(2)} H_3^{0(3)}, \quad (284)$$

а во второй ванте

$$H_2^{0(3)} = H_2^{0(2)} + \bar{h}_{23}^{(2)} H_3^{0(3)}. \quad (285)$$

Здесь через  $\bar{h}_{13}^{(2)}$  и  $\bar{h}_{23}^{(2)}$  обозначены усилия в первой и во второй ванте от воздействия единичного натяжения третьей ванты, вычисленные для дважды статически неопределенной системы, представленной на рис. 62, г.

Окончательно должно быть:

$$\left. \begin{aligned} H_1^{0(1)} + \bar{h}_{12}^{(1)} H_2^{0(2)} + \bar{h}_{13}^{(2)} H_3^{0(3)} &= H_1^0; \\ H_2^{0(2)} + \bar{h}_{23}^{(2)} H_3^{0(3)} &= H_2^0; \\ H_3^{0(3)} &= H_3^0. \end{aligned} \right\} \quad (286)$$

Из этой системы уравнений можно определить неизвестные монтажные натяжения  $H_1^{0(1)}$ ,  $H_2^{0(2)}$ ,  $H_3^{0(3)}$ . Найденные величины, вообще говоря, могут оказаться неверными, так как при составлении уравнений мы не учитывали тот факт, что вантовые элементы являются односторонними связями, а для систем с односторонними связями неприменим в общем случае принцип независимости действия сил, на основании которого составлена система уравнений (286). Лишь в том случае, когда на всех рассматриваемых этапах в последовательно усложняющейся системе не отключаются односторонние связи, решение системы уравнений типа:

может быть признано верным. В противном случае необходимо, по-видимому, искать решение путем ряда попыток, причем решение системы (287) может быть использовано как первое приближение.

## § 42. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ КАК СРЕДСТВО УВЕЛИЧЕНИЯ ЖЕСТКОСТИ

Уже при первом ознакомлении с характером работы гибкой нити (см. § 6) мы обращали внимание на то обстоятельство, что податливость гибкой нити  $d\Delta/dH$  зависит от усилий натяжения, причем с ростом натяжения податливость увеличивается, стремясь асимптотически к величине  $L/EF$ . Аналогичная картина справедлива не только для отдельно взятой гибкой нити, но и для систем, составленных из некоторого количества вантовых элементов.

На рис. 59 приведены диаграммы «сила — перемещение» для элементарного узла, образованного двумя вантами. Исследованы различные значения предварительного напряжения, которое можно охарактеризовать безразмерным параметром

$$\delta^0 = t^0 - \frac{A^0}{(t^0)^2}, \quad (288)$$

где  $\delta^0 = \frac{\Delta^0}{L}$  — безразмерная величина, характеризующая относительную разность между длиной заготовки и пролетом;

$t^0 = \frac{H^0}{EF}$  — безразмерное предварительное напряжение;

$A^0 = \frac{1}{2L} \int \left( \frac{Q^0}{EF} \right)^2 dL$  — параметр поперечной нагрузки

в монтажном состоянии.

Рассмотрены случаи, когда поперечная нагрузка на вантах остается такой же, как и в момент создания предварительного напряжения, и меняется.

Нетрудно заметить следующее:

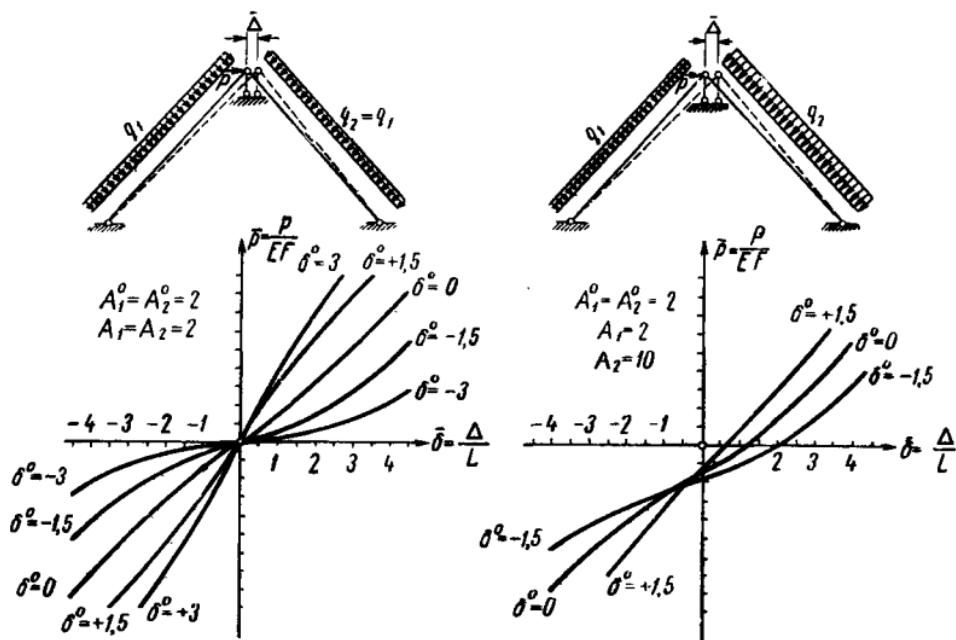


Рис. 59

а) с увеличением значения  $H^0$  увеличивается жесткость узла; это увеличение, однако, не может быть беспрецедентным, поскольку жесткость ванты никогда не превышает величину  $EF_b$ ;

б) при переходе от положительных значений  $\delta^0$  к отрицательным меняется характер нелинейной упругости оттяжечного узла (из «мягкой» она переходит в «жесткую»);

в) большим значениям предварительного напряжения соответствует диаграмма, приближающаяся к линейной в большем диапазоне перемещений оттяжечного узла.

Эти свойства диаграммы «сила — перемещение» сохраняются для любых вантово-стержневых систем и могут быть использованы при проектировании.

На идее регулирования жесткости вантовых элементов за счет подбора, соответствующего значениям величины предварительного напряжения, основано предложение А. Г. Соколова [79] о расчете мачт «методом заданных эпюр».

Суть этого предложения состоит в том, что в уравнениях для расчета мачты (229) и (230) задаются значениями опорных моментов, считая неизвестными значения перемещений оттяжечных узлов и жесткость  $\xi_k$  опор, образованных оттяжками. Общее число неизвестных при этом равно удвоенному количеству оттяжечных узлов, а число уравнений может быть либо таким же (для случая жестко защемленной в основании мачты), либо на единицу превышать число неизвестных (для шарнирно опертой мачты). В последнем случае можно задаться произвольно каким-либо перемещением, например перемещением верхушки мачты.

После того как уравнения типа (229) и (230) решены относительно  $y_k$  и  $\xi_k$ , можно постараться подобрать такие значения параметров предварительного напряжения оттяжек, чтобы при нагрузке на оттяжечный узел, соответствующей заданной эпюре моментов в стволе мачты, действительные перемещения  $y_k$  оттяжечных узлов и их жесткость  $\xi_k$  равнялись величинам, определенным из уравнений.

Следует отметить, что расчет мачт методом заданных эпюр моментов является приближенным в силу того, что представление расчетной схемы мачты в виде стержня на упруго-податливых опорах с постоянной жесткостью  $\xi_k$ , вообще говоря, неверно. Однако при достаточно высоких предварительных напряжениях ошибка, к которой приводит это допущение, не слишком велика (рис. 59).

Более существенным недостатком метода является то, что оптимальная эпюра моментов может соответствовать только одному варианту загружения. Причем нет никакой уверенности, что выбранные наугад моменты не будут превзойдены при других комбинациях нагрузок, даже меньших, чем та, для которой был выполнен расчет по методу заданных эпюр. Так, например, если оптимизация выполнена для полного загружения всех пролетов мачты (рис. 60, а), то отсутствие нагрузки в некоторых пролетах может увеличить как пролетные, так и опорные моменты (рис. 60, б, в).

Таким образом, можно резюмировать:

а) удачным выбором предварительных напряжений можно существенно улучшить значения внутренних усилий;

б) полная оптимизация возможна лишь для одного варианта загружения;

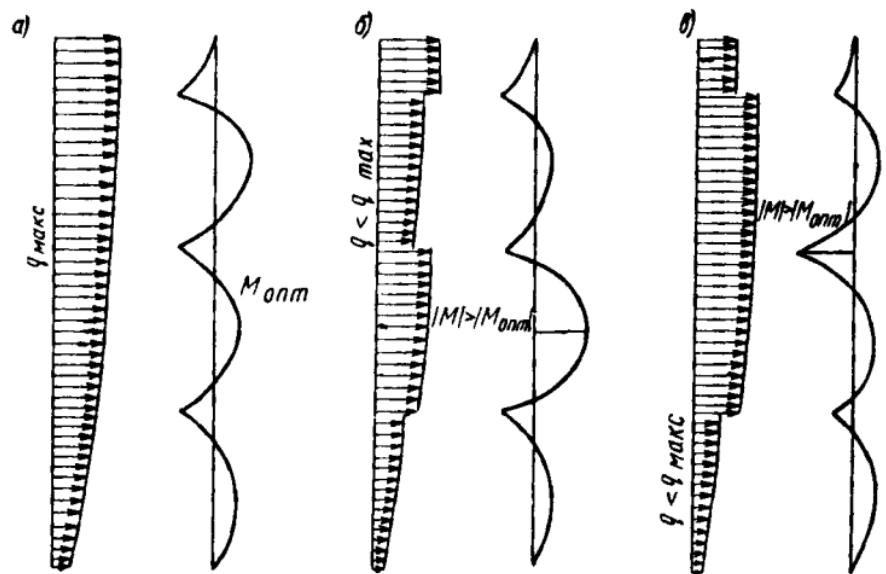


Рис. 60

в) расчет по методу заданных эпюр не избавляет от необходимости проверять конструкцию на другие варианты загружений.

#### § 43. О ВЛИЯНИИ НЕТОЧНОСТИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ НА РАБОТУ КОНСТРУКЦИЙ МАЧТОВОГО ТИПА

В предыдущем параграфе было показано, что соответствующим выбором предварительного напряжения оттяжек можно достичь оптимального распределения изгибающих моментов в стволе мачты. В связи с этим вполне закономерен следующий вопрос, как влияет неизбежная неточность, возникающая при создании предварительного напряжения, на работу конструкций.

Для исследования этого рассмотрим пример мачты на трех ярусах оттяжек (рис. 61, а).

Учитывая, что нормами на производство монтажных работ допускается отклонение от величины заданного предварительного напряжения  $\pm 8\%$ , рассмотрим восемь различных возможных вариантов неточного выполнения работ (рис. 61, б). При этом исследуется только случай преуменьшенного предварительного напряжения, как более опасный.

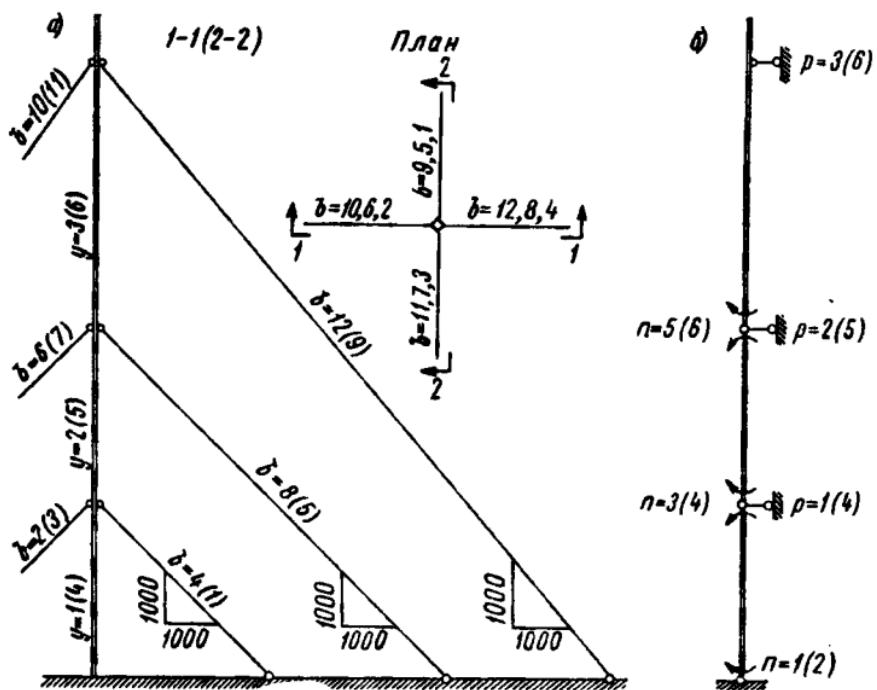


Рис. 61

Расчет выполним по деформированной схеме с использованием алгоритма, описанного в главе 7.

Исходные данные для расчета приведены в табл. 5—9. По этим данным можно составить соответствующие уравнения и решить их итерационным способом Ньютона — Канторовича. Такой расчет был проведен механизированным способом на ЭВМ М-20 по специально разработанной программе [6]. Результаты расчета представлены в табл. 10 (изгибающие моменты) и в табл. 11 (натяжения). Кроме того, на рис. 62 приведены эпюры моментов в стволе мачты для некоторых из исследуемых вариантов.

Таблица 5

Номер участка (см. рис. 61)	$I_y$ , м	$EJ \frac{y'}{T \cdot M^3}$	Изгибающие моменты $m'_{yp}$ от воздействия						Изгибающие моменты $m''_{yp}$ от воздействия						Сжимающие силы в основной системе
			$\tau_x$	$\tau_x$	$\tau_x$	$\tau_x$	$\tau_x$	$\tau_x$	$\tau_x$	$\tau_x$	$\tau_x$	$\tau_x$	$\tau_x$	$\tau_x$	
1	49,00	169 600	1,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—199,1
2	47,25	119 400	—	—	1,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—157,0
3	74,25	119 400	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—72,8
4	49,00	169 600	—	—	1,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—199,1
5	47,25	119 400	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—157,0
6	74,25	119 400	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—72,8

Таблица 6

Номера ванты (см. рис. 61)	$L_b$ , м	$EF_b$ , Т	Предварительное натяжение $H_b^0$ для различных исследуемых вариантов, Т						Поперечные нагрузки в т/м			
			1	2	3	4	5	6	7	8	$q_b^0$	$q_b$
1	69,3	17 600	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	16,2	16,2	16,2	16,2	0,00908.
2	69,3	17 600	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	16,2	16,2	16,2	16,2	0,00322
3	69,3	17 600	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	16,2	16,2	16,2	16,2	0,00908
4	69,3	17 600	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	16,2	16,2	16,2	16,2	0,001130
5	136,1	17 600	14,0	14,0	12,6	12,6	14,0	14,0	12,6	12,6	12,6	0,00946
6	136,1	17 600	14,0	14,0	12,6	12,6	14,0	14,0	12,6	12,6	12,6	0,00098
7	136,1	17 600	14,0	14,0	12,6	12,6	14,0	14,0	12,6	12,6	12,6	0,00946
8	136,1	17 600	14,0	14,0	12,6	12,6	14,0	14,0	12,6	12,6	12,6	0,001152
9	222,5	27 500	30,0	27,0	30,0	27,0	30,0	27,0	30,0	27,0	30,0	0,01310
10	222,5	27 500	30,0	27,0	30,0	27,0	30,0	27,0	30,0	27,0	30,0	0,00410
11	222,5	27 500	30,0	27,0	30,0	27,0	30,0	27,0	30,0	27,0	30,0	0,01310
12	222,5	27 500	30,0	27,0	30,0	27,0	30,0	27,0	30,0	27,0	30,0	0,01788

Таблица 7

Воздействие	Усилие в дополнительных связях (см. рис. 61) при $p$ , равном					
	1	2	3	4	5	6
От единичных значений неизвестных метода сил ( $n_{np}$ )	$x_1 = 1$	-0,0204	—	—	-0,0204	—
	$x_2 = 1$	—	—	—	—	—
	$x_3 = 1$	0,0416	-0,0212	—	—	—
	$x_4 = 1$	—	—	0,0416	-0,0212	—
	$x_5 = 1$	-0,0212	0,0347	-0,0135	—	—
	$x_6 = 1$	—	—	-0,0212	0,0347	-0,0135
От единичных напряжений вант ( $C_{bp}$ )	$H_1 = 1$	—	—	—	0,7071	—
	$H_2 = 1$	0,7071	—	—	—	—
	$H_3 = 1$	—	—	—	-0,7071	—
	$H_4 = 1$	-0,7071	—	—	—	—
	$H_5 = 1$	—	—	—	—	-0,7071
	$H_6 = 1$	—	0,7071	—	—	—
	$H_7 = 1$	—	—	—	—	0,7071

Продолжение табл. 7

		Усиление в дополнительных связях (см. рис. 61) при $p$ , равном					
Воздействие		1	2	3	4	5	6
От единичных нагрузок вант ( $C_{bp}$ )	$H_8 = 1$	—	-0,7071	—	—	—	—
	$H_9 = 1$	—	—	—	—	—	—
	$H_{10} = 1$	—	—	0,6428	—	—	0,6428
	$H_{11} = 1$	—	—	—	—	—	—0,6428
	$H_{12} = 1$	—	—	-0,6428	—	—	—
От единичных перекосов участков ( $d_{yp}$ )	$y = 1$	11,0	—	—	—	—	—
	$y = 2$	1,0	-1,0	—	—	—	—
	$y = 3$	—	1,0	-1,0	—	—	—
	$y = 4$	—	—	1,0	-1,0	—	—
	$y = 5$	—	—	—	1,0	-1,0	—
	$y = 6$	—	—	—	—	1,0	-1,0
От нагрузки ( $R'_p$ )		—	—	—	10,18	20,64	24,27

Таблица 8

Номер участка	Усилие $d_{yb}$ от натяжения вант					
	$H_1 = 1$	$H_2 = 1$	$H_3 = 1$	$H_4 = 1$	$H_5 = 1$	$H_6 = 1$
1	-0,7071	-0,7071	-0,7071	-0,7071	-0,7071	-0,7071
2	—	—	—	—	-0,7071	-0,7071
3	—	—	—	—	—	—
4	-0,7071	-0,7071	-0,7071	-0,7071	-0,7071	-0,7071
5	—	—	—	—	-0,7071	-0,7071
6	—	—	—	—	—	—

Продолжение табл. 8

Номер участка	Усилие $d_{yb}$ от натяжения вант					
	$H_7 = 1$	$H_8 = 1$	$H_9 = 1$	$H_{10} = 1$	$H_{11} = 1$	$H_{12} = 1$
1	-0,7071	-0,7071	-0,7660	-0,7660	-0,7660	-0,7660
2	-0,7071	-0,7071	-0,7660	-0,7660	-0,7660	-0,7660
3	—	—	-0,7660	-0,7660	-0,7660	-0,7660
4	-0,7071	-0,7071	-0,7660	-0,7660	-0,7660	-0,7660
5	-0,7071	-0,7071	-0,7660	-0,7660	-0,7660	-0,7660
6	—	—	-0,7660	-0,7660	-0,7660	-0,7660

Таблица 9

Перемещение  $u_p$  за счет неточности монтажа по направлениям связей при  $p$ , равном

1	2	3	4	5	6
0,0327	-0,0643	0,1137	0,327	-0,0643	0,1137

Следует отметить, что изменение значений величины предварительного напряжения в пределах 10% привело в данном случае к колебаниям в величинах пролетных моментов до 30%, а опорный момент  $M_5' - M_6'$  изменился более чем в два раза.

Нетрудно сообразить, что такого рода неустойчивость результатов связана со значениями параметров нелинейности гибких нитей  $A = \frac{1}{2L} \int_0^L \left( \frac{Q}{EF} \right)^2 dL$  (см. § 6). В рассматриваемом примере эта величина колеблется от  $0,535 \cdot 10^{-12}$  до  $0,271 \cdot 10^{-9}$ , т. е. является достаточно ма-

Таблица 10

Усл.лине	Исследуемый вариант						
	1	2	3	4	5	6	7
$M'_1$	+ 2,0361	+ 2,3544	+ 1,5006	+ 2,1858	+ 1,2316	+ 1,9171	+ 1,0608
$M'_2$	+ 2,4508	+ 0,49943	- 1,4324	- 1,8028	+ 1,0011	+ 0,6572	- 1,1847
$M'_3$	- 33,133	- 33,517	- 26,532	- 30,657	- 29,362	- 33,521	- 26,539
$M'_4$	+ 75,423	+ 89,923	+ 91,897	+ 90,557	+ 92,285	+ 90,944	+ 92,921
$M'_5$	+128,34	+146,96	+154,93	+154,59	+146,36	+146,11	+153,92
$M'_6$	+136,24	+ 52,883	+ 35,371	+ 43,432	+ 45,167	+ 53,228	+ 35,731
$M''_1$	+ 2,4508	+ 0,40946	- 1,4324	- 1,80280	+ 1,0011	+ 0,65728	- 1,1847
$M''_2$	- 33,133	- 33,517	- 26,532	- 30,657	- 29,362	- 33,521	- 26,539

Продолжение табл. 10

Усилие	Исследуемый вариант						
	1	2	3	4	5	6	7
$M_3''$	$\pm 0,0000$	$\pm 0,0000$	$\pm 0,0000$	$\pm 0,0000$	$\pm 0,0000$	$\pm 0,0000$	$\pm 0,0000$
$M_4''$	+128,34	+146,97	+154,94	+154,59	+146,37	+146,11	+153,92
$M_5''$	+136,24	+ 52,883	+ 35,371	+ 43,432	+ 45,167	+ 53,228	+ 35,730
$M_6''$	+ 45,000	+ 45,000	+ 45,000	+ 45,000	+ 45,000	+ 45,000	+ 45,000
$M_1$	+ 2,2434	+ 1,3819	+ 3,4092	+ 0,19148	+ 1,1163	+ 1,2872	- 0,06197
$M_2$	- 15,341	- 16,553	- 13,982	- 16,230	- 14,180	- 16,432	- 13,861
$M_3$	- 16,566	- 16,758	- 13,266	- 15,328	- 14,681	- 16,760	- 13,269
$M_4$	+ 53,882	+ 70,445	+ 75,322	+ 74,576	+ 71,287	+ 70,528	+ 75,420
$M_5$	+ 70,089	+ 37,723	+ 32,994	+ 36,813	+ 33,568	+ 37,470	+ 32,625
$M_6$	-160,38	-202,03	-210,81	-206,78	-205,91	-201,88	-210,63

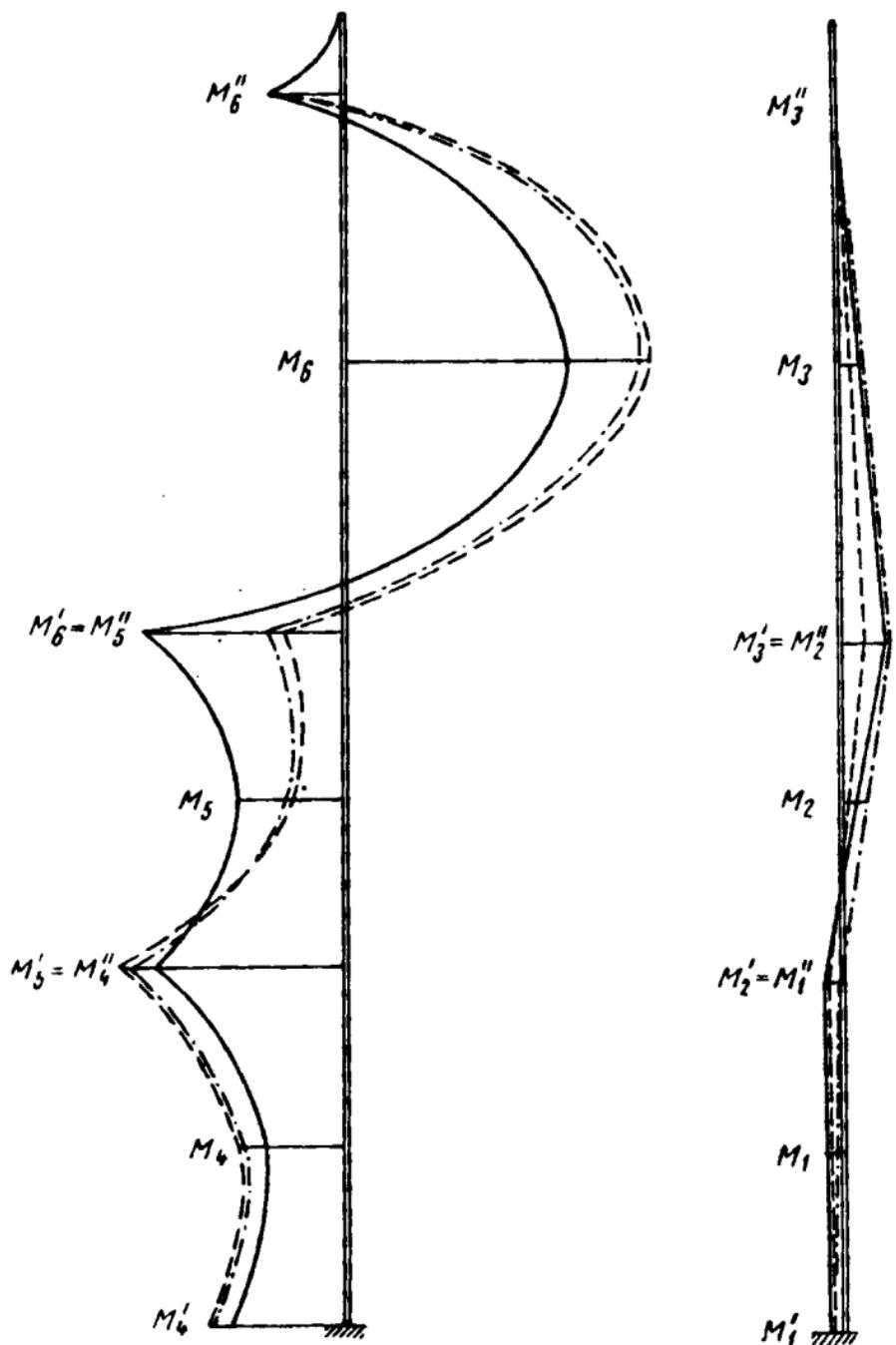


Рис. 62

Таблица 11

Усилие	Исследуемый вариант							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$H_1$	19,50	17,80	17,35	17,46	15,92	16,03	15,59	15,69
$H_2$	26,42	26,50	26,65	26,64	24,64	24,60	24,75	24,43
$H_3$	34,81	36,66	27,15	37,06	34,92	34,80	35,29	35,18
$H_4$	27,49	27,46	27,32	27,36	25,54	25,58	25,44	25,74
$H_5$	10,30	9,01	9,12	9,09	9,92	9,91	9,11	9,09
$H_6$	20,31	20,52	18,48	18,58	20,44	20,53	18,49	18,84
$H_7$	40,93	42,33	40,92	40,98	42,26	42,32	40,92	40,99
$H_8$	22,68	22,48	20,76	20,63	22,54	22,47	20,69	20,44
$H_9$	17,70	23,00	25,66	22,96	25,71	23,00	25,67	22,96
$H_{10}$	43,26	39,52	42,91	39,51	42,91	39,52	42,91	44,28
$H_{11}$	65,17	59,47	62,09	59,55	62,00	59,46	62,08	59,55
$H_{12}$	39,30	36,21	39,60	36,21	39,60	36,21	39,68	33,57

лой. В тех же случаях, когда значение  $A$  приближается к  $0,1 \cdot 10^{-3}$ — $0,1 \cdot 10^{-2}$  (а можно указать реальные примеры с такими параметрами вантовых элементов), разброс значений внутренних усилий за счет неточностей предварительного напряжения может достигнуть 300—500 %.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Безухов Н. И. Основы теории сооружений, материал которых не следует закону Гука. Труды Московского автомобильно-дорожного института, сб. № 4, 1936.
2. Беленя Е. И. Предварительно напряженные металлические конструкции. Госстройиздат, 1963.
3. Берж К. Теория графов и ее применения. ИЛ, 1962.
4. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехтеориздат, 1956.
5. Болотин В. В. Нелинейная теория упругости и устойчивость «в большом». В сб.: «Расчеты на прочность в машиностроении», вып. 3. Машгиз, 1958.
6. Борисенко Ю. С., Гордеев В. Н., Перельмутер А. В. Статический расчет вантово-стержневых систем с применением ЭВМ. Тезисы докладов на IV Всесоюзной конференции по применению электронных математических машин в строительной механике, машиностроении и строительном производстве, г. Киев, 18—21 мая 1965 г. Киев, 1965.
7. Винокурский Х. А. Стальные конструкции в тяжелом машиностроении. Машгиз, 1960.
8. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, 1963.
9. Гольденблат И. И. Некоторые вопросы теории упругопластических деформаций. В сб.: «Исследование прочности, пластичности и ползучести строительных материалов». Госстройиздат, 1955.
10. Гордеев В. Н. К расчету сеток. «Прикладна механіка», т. 9, вып. 5, 1963 г. (на укр. яз.).

11. Гордеев В. Н. Исследование плоских нитяных сетей и тканевых оболочек. ГПИ Укрпроектстальконструкция, вып. 95, 1963.
12. Гордеев В. Н., Перельмутер А. В. Уравнения метода сил для расчета вантово-стержневых систем. В сб.: «Сопротивление материалов и теория сооружений», вып. 4. Киев, «Будівельник», 1966 (на укр. яз.).
13. Гордеев В. Н., Перельмутер А. В. Расчет упругих систем с односторонними связями, как задача квадратичного программирования. В сб.: «Исследования по теории сооружений», вып. 15. Стройиздат, 1966.
14. Давиденко Д. Ф. О приближенном решении систем нелинейных уравнений. «Украинский математический журнал», т. 5, № 2, 1963.
15. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. Физматгиз, 1963.
16. Дмитриев Л. Г., Сосис П. М. Программирование расчета пространственных конструкций. Госстройиздат УССР, 1963.
17. Дривинг А. Я. Устойчивость мачт на оттяжках. Стройиздат, 1964.
18. Загускин В. Л. Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений. Физматгиз, 1960.
19. Затуловский И. Г., Гордеев В. Н., Перельмутер А. В. Прогрессивные конструктивные решения. «Промышленное строительство и инженерные сооружения», 1960, № 5.
20. Зойтендайк Г. Методы возможных направлений. ИЛ, 1963.
21. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. «Наука», 1964.
22. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика. «Успехи математических наук», т. 3, вып. 6, 1948.
23. Качурин В. К. Гибкие нити с малыми стрелками. Гостехиздат, 1956.
24. Качурин В. К. Теория висячих систем. Госстройиздат, 1962.
25. Качурин В. К. Регулирование усилий в вантовой системе с балкой жесткости. В сб.: «Вопросы проектирования мостов». ЛИСИ, вып. 39, 1962.

26. Киреенко В. И. Вантовые системы в железобетонных мостах больших пролетов. В сб.: «Стальные предварительно напряженные и тросовые конструкции». Стройиздат, 1964.
27. Кирсанов Н. М. Альбом конструкций висячих покрытий. Конструктивные и компоновочные решения. «Высшая школа», 1965.
28. Корноухов Н. В. Прочность и устойчивость стержневых систем. Стройиздат, 1949.
29. Крюков К. П., Курносов А. И., Новгородцев Б. П. Конструкции и расчет опор линий электропередачи. «Энергия», 1964.
30. Крыльцов Е. И. Вантовые мосты. Экономика, исследование, проектирование и опытное строительство. Трансжелдориздат, 1935.
31. Кудрявцев Л. Д. О некоторых математических вопросах теории электрических цепей. «Успехи математических наук», т. 3, вып. 4 (26), 1948.
32. Кузнецов Э. Н. Некоторые вопросы расчета висячих покрытий. В сб.: «Висячие покрытия». Под ред. И. М. Рабиновича. Госстройиздат, 1962.
33. Кузнецов Э. Н. Мгновенно жесткие вантовые сетки. В сб.: «Исследования по теории сооружений», вып. 13. Стройиздат, 1964.
34. Кюнци Г. П., Крелле В. Нелинейное программирование. «Советское радио», 1965.
35. Лашенко М. Н. Регулирование напряжений в металлических конструкциях. Стройиздат, 1966.
36. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики, т. 1, ч. 2. ИЛ, 1952.
37. Лейтес С. Д. Нелинейная упругость и конечные деформации в задачах устойчивости. В сб.: «Расчет пространственных конструкций», вып. 6. Госстройиздат, 1961.
38. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1935.
39. Матевосян Р. Р. Устойчивость сложных стержневых систем (качественная теория). Госстройиздат, 1961.
40. Матевосян Р. Р. Качественное исследование уравнений

метода сил для стержневых систем с бесконечно большим числом степеней свободы. В сб.: «Строительная механика». Стройиздат, 1966.

41. Мацелинский Р. Н. Статические расчеты гибких висячих конструкций. Госстройиздат, 1952.

42. Мацелинский Р. Н. Статический расчет упругих нитей. «Строительная механика и расчет сооружений», 1959, № 4.

43. Мельников Н. П. Развитие металлических конструкций. Стройиздат, 1965.

44. Металлические конструкции. В сб.: «Состояние и перспективы развития». Под ред. Н. С. Стрелецкого. Госстройиздат, 1961.

45. Николаев И. С., Мельников Н. П. Всемирная выставка в Брюсселе. Госстройиздат, 1963.

46. Нудельман Я. Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем. Гостехиздат, 1949.

47. Нудельман Я. Л. Об одном способе решения уравнения частот и критических сил, составленных методом сил. Сборник трудов Одесского гидротехнич. института, вып. 6. Изд-во Академии архитектуры УССР, 1954.

48. Облегченные несущие металлические конструкции. Сборник под ред. А. Г. Соколова. Проектстальконструкция. Госстройиздат, 1963.

49. Перельмутер А. В. О применении теории графов к некоторым задачам строительной механики. «Строительная механика и расчет сооружений», 1965, № 3.

50. Перельмутер А. В. О расчете комбинированных вантово-стержневых систем типа мачт на оттяжках. В сб.: «Проблемы устойчивости в строительной механике». Стройиздат, 1965.

51. Перельмутер А. В. Применение шагового метода к статическому расчету и проверке устойчивости вантово-стержневых систем типа мачтовых конструкций. В сб.: «Материалы по металлическим конструкциям», вып. 11. Стройиздат, 1966.

52. Петров В. В. К расчету пологих оболочек при конечных прогибах, Известия вузов, «Строительство и архитектура», № 1, 1959.

53. Петропавловский А. А. Расчет на устойчивость и определение собственных частот колебаний сложной комбинированной системы по типу нового моста метро через Москву-реку

у Лужников. Труды МИИТ, вып. 131. Трансжелдориздат, 1960.

54. Попов Г. Д. Вантовый переход через Волгу. «Строительная промышленность», 1955, № 12.

55. Протасов К. Г. Новые вантовые фермы. Трансжелдориздат, 1963.

56. Рабинович И. М. К теории вантовых ферм. «Техника и экономика путей сообщений», 1924, № 1—4.

57. Рабинович И. М. Об эквивалентных и нулевых воздействиях. В сб.: «Исследования по теории сооружений», вып. 2. ОНТИ, 1936.

58. Рабинович И. М. О системах, переходных между статически определимыми, статически неопределенными и геометрически изменяемыми. В сб.: «Исследования по теории сооружений». ОНТИ, 1936.

59. Рабинович И. М. Некоторые вопросы теории сооружений, содержащих односторонние связи. «Инженерный сборник», т. 6, 1950.

60. Рабинович И. М. Курс строительной механики стержневых систем, ч. 2. Госстройиздат, 1954.

61. Рабинович И. М. К задаче статически неопределенных систем с односторонними связями (доказательство единственности решения). В сб.: «Исследования по теории сооружений», вып. 10. Госстройиздат, 1961.

62. Рабинович И. М. Мгновенно-жесткие системы, их свойства и основы расчета. В сб.: «Висячие покрытия». Госстройиздат, 1962.

63. Ратновский Ю., Рубинштейн Ю. Проекты покрытия стадиона «Динамо». «Архитектура и строительство Москвы», 1959, № 2.

64. Резников Р. А. Об автоматизации расчетов строительных конструкций. В сб.: «Механизация инженерно-технических расчетов при проектировании сооружений». Госстройиздат, 1959.

65. Резников Р. А. Методы решения задач строительной механики на электронных цифровых машинах. Стройиздат, 1964.

66. Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. Госстройиздат, 1954.

67. Ржаницын А. Р. Статика и динамика пологой упругой нити. В сб.: «Висячие покрытия». Госстройиздат, 1962.

68. Савицкий Г. А. Основы расчета радиомачт. Связьиздат, 1953.
69. Савицкий Г. А. Антенные устройства. Связьиздат, 1962.
70. Сальвадори М. Дж. Численные методы в технике. ИЛ, 1955.
71. Слоним Э. Я. Особенности работы висячих однопролетных решетчатых вантовых ферм. В сб.: «Материалы по металлическим конструкциям», вып. 11. Стройиздат, 1966.
72. Смирнов А. Ф. Статическая и динамическая устойчивость сооружений. Трансжелдориздат, 1947.
73. Смирнов А. Ф. Устойчивость и колебания сооружений. Трансжелдориздат, 1958.
74. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 3, ч. 1. Физматгиз, 1958.
75. Соболева О. Н. Исследование степени неустойчивости стержневых систем с бесконечным числом степеней свободы, разрешаемых методом перемещений. В сб.: «Строительная механика». Стройиздат, 1966.
76. Современная математика для инженеров. Под ред. Э. Ф. Беккенбаха. ИЛ, 1958.
77. Современные методы расчета сложных статически неопределеных систем. Сборник статей под ред. А. П. Филина. Судпромгиз, 1961.
78. Соколов А. Г. Высотные сооружения типа мачт и башен. В сб.: «Вопросы применения стальных конструкций в строительстве». Стройиздат, 1953.
79. Соколов А. Г. Расчет мачт методом заданных эпюр моментов. «Строительная механика и расчет сооружений», 1959, № 2.
80. Соколов А. Г. Опоры линий передач. Госстройиздат, 1961.
81. Соколов Н. П. Пространственные матрицы и их приложения. Физматгиз, 1960.
82. Стрелецкий Н. Н. Решетчатые комбинированные системы мостов. Дориздат, 1953.
83. Стрелецкий Н. С. Курс металлических конструкций, ч. 3. Госстройиздат, 1944.
84. Таккер А. У. Двойственные системы линейных однородных соотношений. В сб.: «Линейные неравенства и смежные вопросы». ИЛ, 1959.

85. Трофимович В. В. Расчет усилий предварительного напряжения статически неопределеных вантовых систем. «Прикладная механика», т. 2, вып. 6, 1966.
86. Уманский А. А. Статика и кинематика ферм. Гостехиздат, 1957.
87. Феодосьев В. И. Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем. «Прикладная математика и механика», т. 27, вып. 2, 1963.
88. Феодосьев В. И. Применение шагового метода к анализу устойчивости сжатого стержня. «Прикладная математика и механика», т. 27, вып. 5, 1963.
89. Филин А. П. Определение лишних неизвестных в физически нелинейных статически неопределеных стержневых системах. «Доклады АН СССР», т. 89, № 4, 1953.
90. Хазан И. А. Стальные железнодорожные мосты за рубежом. Автотрансиздат, 1961.
91. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. «Наука», 1965.
92. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. Физматгиз, 1963.
93. Яковлев М. Н. К решению систем нелинейных уравнений методом дифференцирования по параметру. «Журнал вычислительной математики и математической физики», т. 4, № 1, 1964.
94. Bleich F. Stahlhochbauten, 2 Band, 1933.
95. Doni E. Methode matricielle de calcul des tuyauteries en expansion thermique entravée. «Acier», № 9, 10, 11, 12, 1957.
96. Doni E., Goethals J. Metode matricielle de calcul des structures hyperstatiques. «Acier», № 1, 1959.
97. Fenves S. J., Branin F. H. Network-topological formulation of structural analysis. «Journal of the Structural Division. Proc. ASCE», v. 89, part. 1, ST4, 1963.
98. Негбер К. Н. Calcul des cheminees et mats haubanes. «Acier», № 10, 1961.
99. Herrnstadt Th. 510 m hoher Fernsehmast in Cape Girardeau. Mo USA, «Der Stahlbau», № 3, 1961.
100. Hull F. H. Stability analysis of multi-level guyed towers. «Journal of the Structural Division. Proc. ASCE», v. 88, ST2, 1962.

101. K o l o u s e k V. Solution statique et dynamique des pilon d'antenna haubanes. «Memoires i Internatl. Assoc. for Bridge and Structural Engrg», v. 8, 1947.
102. L i n d N. C. Analysis of structures by system theory. «Journal of the Structural Division. Proc. ASCE», v. 88, ST2, 1962.
103. M i e s e l K. Die Berechnungen mehrfach abgespannter Mastgruppen. «Forschungs. Geb. Stahlbaues», № 12, Köln, 1956.
104. S p i l l e r s W. R. Network analogy for linear structures. «Journal Engng, Mech. Division. Proc. ASCE», v. 88, № 4, 1963.
105. V o g e l G. Die Montage des Stahlüberbaues des Severinsbrücke Köln. «Der Stahlbau», № 9, 1960.

## О ГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие .....	3
<i>Глава 1.</i> Предварительные сведения о вантово-стержневых системах .....	5
§ 1. Вводные замечания .....	5
§ 2. Примеры конструктивного решения вантово-стержневых систем .....	6
§ 3. Основные расчетные предпосылки .....	14
<i>Глава 2.</i> Гибкая нить как элемент вантово-стержневой системы .....	16
§ 4. Уравнения равновесия пологой гибкой нити .....	16
§ 5. Определение перемещений пологой гибкой нити .....	20
§ 6. Нить как нелинейно-упругий стержень .....	25
§ 7. Влияние нагрузки, перпендикулярной плоскости пролета, и продольной нагрузки .....	28
<i>Глава 3.</i> Статические и кинематические свойства стержневых и вантово-стержневых систем при малых перемещениях .....	32
§ 8. Матрица инциденций и ее свойства .....	32
§ 9. Уравнения равновесия для произвольной свободной шарнирно-стержневой системы .....	38
§ 10. Кинематика произвольной шарнирно-стержневой системы .....	40
§ 11. Некоторые свойства уравнений равновесия и кинематических уравнений .....	42
§ 12. Статические и кинематические свойства вантово-стержневых систем .....	46
<i>Глава 4.</i> Перемещения вантово-стержневых систем и основы метода сил .....	51
§ 13. Перемещения статически определимых вантово-стержневых систем .....	51
§ 14. Другой вид формулы (89) .....	54
§ 15. Пример расчета статически определимой вантово-стержневой системы .....	56

§ 16. Уравнение метода сил .....	58
§ 17. Выражение для функции дополнительной работы ..	64
§ 18. О единственности решения системы линейных уравнений метода сил .....	66
§ 19. Случай исчезающие малых поперечных нагрузок на вантовых элементах .....	68
§ 20. Расчет упругих систем с односторонними связями как задача квадратичного программирования ....	70
<i>Глава 5. Основы метода перемещений и смешанного метода</i>	
§ 21. Основные уравнения метода перемещений .....	79
§ 22. Уравнения смешанного метода .....	83
§ 23. Уравнения для расчета вантово-стержневых систем по деформированной схеме .....	88
§ 24. Уравнения в вариациях для исследования устойчивости .....	93
<i>Глава 6. Решение нелинейных уравнений метода сил при помощи координатного спуска .....</i>	97
§ 25. Идея метода координатного спуска .....	97
§ 26. Вопросы сходимости. Отделение корня нелинейного уравнения .....	101
§ 27. Отыскание начального приближения .. .	105
<i>Глава 7. Применение итерационного метода Ньютона — Канторовича .....</i>	111
§ 28. Метод Ньютона — Канторовича и его механическая интерпретация .....	111
§ 29. Сходимость итерационного процесса.....	115
§ 30. Выбор вспомогательной системы при расчете мачтowych конструкций .....	117
§ 31. Содержание расчета в процессе итераций .....	120
§ 32. Расчет системы мачт по деформированной схеме (приближенный прием) .....	124
§ 33. Сравнение точных и приближенных уравнений для расчета по деформированной схеме .....	127
<i>Глава 8. Применение шагового метода к статическому расчету и анализу устойчивости .....</i>	135
§ 34. О шаговом методе решения систем нелинейных уравнений .....	135
§ 35. Случай простого загружения мачтовой системы ..	139
§ 36. Устойчивость вантово-стержневой системы в процессе загружения. Некоторые общие соображения ..	145
§ 37. Определение степени неустойчивости линеаризованной системы .....	148
	189

§ 38. Некоторые замечания по поводу качественного метода исследования .....	154
a 9. Искусственное регулирование усилий в элементах вантово-стержневых систем .....	158
§ 39. Цели и способы регулирования усилий .....	158
§ 40. Линейно-независимые самонапряжения .....	159
§ 41. Последовательность создания предварительного напряжения .....	163
§ 42. Предварительное напряжение как средство увеличения жесткости .....	167
§ 43. О влиянии неточности предварительного напряжения на работу конструкций мачтового типа..... ература . .....	170 180

Перельмутер Анатолий Викторович

Основы расчета  
вантово-стержневых систем

\* \* \*

*Стройиздат*  
*Москва, К-31, Кузнецкий мост, д. 9*

\* \* \*

Редактор издательства Осипова Э. М.

Обложка художника Столярова А. А.

Технический редактор Родионова В. М.

Корректоры Лебедева Г. А., Лелягина Л. С.

---

Сдано в набор 9/XII 1968 г. Подписано к печати 30/V 1969 г.  
Т-08047. Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>2</sub>.—3 бум. л. 10,08 усл. печ. л. (9,0 уч.-изд. л.)  
Тираж 6.000 экз. Изд. № А.VI-1597. Зак. № 1377. Цена 48 коп.

---

Владимирская типография Главполиграфпрома  
Комитета по печати при Совете Министров СССР  
Гор. Владимир, ул. Победы, д. 18-б

**В СТРОИЗДАТЕ В 1969 г.  
ВЫХОДЯТ В СВЕТ  
СЛЕДУЮЩИЕ КНИГИ**

Кальницкий А. А. Расчет статически неопределеных железобетонных конструкций с учетом перераспределения усилий (аналитический и графоаналитический способы и примеры расчета), 9 л.

Милованов А. Ф., Шувалов В. А. Расчет изгибаемых жаростойких предварительно напряженных железобетонных элементов (примеры расчета), 4 л.

НИИЖБ (под ред. Г. И. Бердичевского). Предварительно напряженные железобетонные конструкции производственных зданий и инженерных сооружений, 15 л.

ЦНИИПроектстальконструкция. Материалы по металлическим конструкциям, вып. 14, 17 л.

ЦНИИСК (авт. Э. Н. Кузнецов). Введение в теорию вантовых систем, 8 л.



А.В.ПЕРЕЛЬМУТЕР

**ОСНОВЫ  
РАСЧЕТА  
ВАНТОВО-  
СТЕРЖНЕВЫХ  
СИСТЕМ**